百校联盟 2016届高考复习全程精练·模拟卷

理科数学　　参考答案

(一)

1.C 【解析】因为 $A=\{x\mid y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\ln(2-x)\}=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$.

2.C 【解析】因为$\frac{z}{1+z}=1+\mathrm{i}$，所以 $z=(1+\mathrm{i})(1+z)=1+\mathrm{i}+(1+\mathrm{i})z$，所以 $-\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$. 所以 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1+\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$.

3.C 【解析】因为在同一直角坐标系中做出函数 $y=2^x$ 和 $y=2-x^2$ 的图象可知有 2 个交点，所以 p_1 为假命题，$(\neg p_1)$为真命题，因为不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集是 $-1<x<3$，所以 p_2 是真命题，$(\neg p_2)$是假命题，所以$(\neg p_1)\vee p_2$ 是真命题.

4.D 【解析】因为 $y=\sqrt{x^2+2x}$ 为非奇非偶函数，所以 A 错误，函数 $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 为偶函数，且值域为$[2,+\infty)$，所以 B 错误，函数 $y=x^2\cos x$，当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$y<0$，所以 C 错误，因为函数 $x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)-[-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)]=x\ln 1=0$，所以是偶函数，因为当 $x\geqslant 0$ 时函数 $y=x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$是增函数，所以 $y\geqslant 0$，即值域为$[0,+\infty)$.

5.D 【解析】根据题意设各组的频率为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6，则 $a_1+a_6+a_2=0.3$，又因为 a_1,a_6,a_2 是等差数列，所以 $a_1+a_2=0.2$，$a_6=0.1$，因为 $a_4=0.25$，所以 $a_3+a_5=0.45$，因为 $a_3=2a_5$，所以 $a_3=0.3$，$a_5=0.15$，由图可知 $a_2=a_5=0.15$. 又因为总人数为$\frac{25}{0.25}=100$，抽样比为$\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，所以从第 2 组抽取 $0.15\times 100\times\frac{1}{5}=3$ 人，从第 6 组抽取 $0.1\times 100\times\frac{1}{5}=2$ 人.

6.A 【解析】因为 $\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{-1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$，所以 $\sqrt{1+\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，即 $\sin^2\theta=\frac{1}{9}$，所以 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

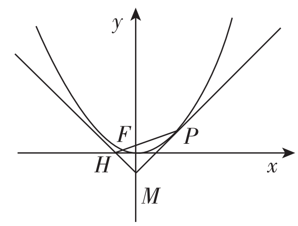
7.B 【解析】由题可知 $PF_1\perp PF_2$，所以 $S_{\triangle OPF_1}=\frac{1}{2}\times|PF_1|\times\frac{1}{2}|PF_2|=ac$，即$|PF_1|\times|PF_2|=4ac$. 由于$|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，所以$(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\times|PF_2|=4c^2$，所以 $4a^2+8ac=4c^2$，所以 $e=\sqrt{2}+1$.

8.C 【解析】因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BP}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\lambda\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{3\lambda}{4}\times 2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.

9.C 【解析】由图象可知$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，所以 $\omega=1$，因为 $f(\frac{\pi}{12})=\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$，因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $g(x)=-\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\cos(2x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{7\pi}{12})$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{7\pi}{12}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $2k\pi-\frac{13\pi}{12}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi-\frac{\pi}{12}$，所以函数 $g(x)$的单调增区间为$[k\pi-\frac{13\pi}{24}$，

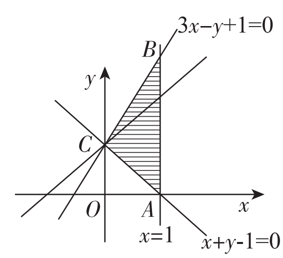
$k\pi-\frac{\pi}{24}]$$(k\in\mathbf{Z})$.

10. B 【解析】因为 $BC=2$,$AC=1$,$\angle ACB=60°$,所以 $AB^2=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$,所以 $AB=\sqrt{3}$,所以 $AB^2+AC^2=BC^2$,所以取 BC 的中点 F,连接 OF,则 $OF\perp$平面 ABC,所以 $OF=\sqrt{3}$,所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=1$.



11. B 【解析】如图所示,设 $P(x_0,y_0)$,因为 $y=\frac{1}{2}x^2$,所以 $y'=x$,所以 $k=x_0$,所以切线方程为 $y-y_0=x_0(x-x_0)$,所以 $M(0,-\frac{1}{2}x_0^2)$,因为 $F(0,\frac{1}{2})$,所以 $k_{PF}=\frac{y_0-\frac{1}{2}}{x_0}=\frac{x_0^2-1}{2x_0}$,所以直线 PF 的方程 $y-\frac{1}{2}=\frac{x_0^2-1}{2x_0}x$,所以 $H(-\frac{x_0}{x_0^2-1},0)$,所以 $k_{MH}=\frac{\frac{1}{2}x_0^2}{-\frac{x_0}{x_0^2-1}}=\frac{x_0^2(x_0^2-1)}{-2x_0}$,因为 $HM\perp PM$,所以$\frac{x_0^2(x_0^2-1)}{-2x_0}x_0=-1$,解得 $x_0^2=2$,所以$|PF|=y_0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

12. A 【解析】因为函数 $f(x)$对于任意的 $x>0$ 有 $xf'(x)+(2-x)f(x)=\frac{e^x}{x}(x+\ln x-1)$,所以令 $\frac{x^2f'(x)+(2x-x^2)f(x)}{e^x}=x+\ln x-1$,令 $h(x)=\frac{x^2f(x)}{e^x}$,所以 $h'(x)=x+\ln x-1$,令 $g(x)=h'(x)$,则 $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$,所以 $h'(x)=x+\ln x-1$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,因为 $h'(1)=1+\ln1-1=0$,所以 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$;$x>1$ 时,$h'(x)>0$,所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减,$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.因为 $4f(1)<\sqrt{e}f(\frac{1}{2})\Rightarrow\frac{\frac{1}{4}f(\frac{1}{2})}{\sqrt{e}}>\frac{f(1)}{e}$,即 $h(\frac{1}{2})>h(1)$,所以 A 正确;$4f(2)<ef(1)\Rightarrow\frac{4f(2)}{e^2}<\frac{f(1)}{e}$,即 $h(2)<h(1)$,所以 B 错误;$4ef(2)>9f(3)\Rightarrow\frac{4f(2)}{e^2}>\frac{9f(3)}{e^3}$,即 $h(2)>h(3)$,所以 C 错误;$e^{\frac{3}{2}}f(\frac{1}{2})<16f(2)\Rightarrow\frac{\frac{1}{4}f(\frac{1}{2})}{\sqrt{e}}<\frac{4f(2)}{e^2}$,即 $h(\frac{1}{2})<h(2)$,所以 D 不确定.



13. $a\geqslant2$ 【解析】做出不等式组$\begin{cases}x+y-1\geqslant0\\x-1\leqslant0\\3x-y+1\geqslant0\end{cases}$表示的平面区域为如图所示的三角形 ABC,因为 $y-2x\leqslant a$ 恒成立,所以$(y-2x)_{\max}\leqslant a$,令 $z=y-2x$,所以直线 $y=2x+z$ 经过点 B 时,z 取得最大值,由$\begin{cases}x=1\\3x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$,所以$(y-2x)_{\max}=4-2=2$,所以 $a\geqslant2$.

14. $\frac{11}{8}$ 【解析】根据程序框图的运行可知,因为 $S=0$,$n=1$,$i=1\Rightarrow S=\frac{1}{2}<\frac{9}{8}$,所以进入循环,$i=2$,$n=2\Rightarrow S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}=1<\frac{9}{8}$;$i=3$,$n=3\Rightarrow S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}=1+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}>\frac{9}{8}$,满足条件,退出循环,所以 $S=\frac{11}{8}$.

15. 6 【解析】根据三视图可知该几何体是由一个四棱柱和一个四棱锥组成,根据图中的数据可知 $V_1=\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\times1=3$,$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\times3=3$,所以 $V=3+3=6$.

16. $3\sqrt{5}$ 【解析】因为根据图中给出的数据可知，$\angle EDC=30^\circ$，$CD=\sqrt{30}$，$BC=\sqrt{10}$，所以在$\triangle BDC$中，$\frac{BC}{\sin30^\circ}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，所以$\sin\angle DBC=\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{30}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$\angle DBC$为钝角，所以$\angle DBC=120^\circ$，所以$\angle DCB=30^\circ$，所以$BD=\sqrt{10}$，又$\angle ADB=\angle EDC=30^\circ$，所以在$\triangle ABD$中，由正弦定理可得，$\frac{AB}{\sin30^\circ}=\frac{BD}{\sin\angle DAB}\Rightarrow\sin\angle DAB=\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 因为$\frac{\sqrt{10}}{10}<\frac{1}{2}$，所以$\angle DAB=\alpha$为锐角，所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以$\sin\angle ABD=\sin(30^\circ+\alpha)=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{10}}{20}$，在$\triangle ABD$中，$\frac{AD}{\sin(30^\circ+\alpha)}=\frac{AB}{\sin30^\circ}\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{10}}{2}(3+\sqrt{3})$，在$\triangle ACD$中，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC=45$，所以$AC=3\sqrt{5}$.

17.【解析】(Ⅰ)因为$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}$时，$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=S_{n+1}-S_{n-1}$，

所以$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}+a_n$. ………………………………………………………… 2分

整理得$a_n^2-a_{n+1}^2=(a_{n+1}+a_n)a_{n+1}a_n$，因为$a_n>0$，所以$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$，即

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$，所以$n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}$，数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是公差为1的等差数列. ……………………………… 4分

因为$a_2=\frac{1}{3}$，所以$\frac{1}{a_n}=3+(n-2)=n+1$，所以$a_n=\frac{1}{n+1}(n\geqslant2)$，

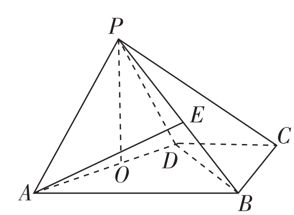
$a_1=\frac{1}{2}$也满足，所以$a_n=\frac{1}{n+1}$. ………………………………………………………………… 6分

(Ⅱ)因为$b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，……………………………………………… 8分

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，……………………………… 10分

$T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$. …………………………………………………………………… 12分

18.【解析】(Ⅰ)根据题意将三角形ADP沿边AD折起后得到如图所示的四棱锥$P-ABCD$，$AD=BD=\sqrt{2}$，



所以$AD^2+BD^2=4=AB^2$，所以$BD\perp AD$. ……………………………………… 3分

又因为平面$APD\perp$平面$ABCD$，平面$APD\cap$平面$ABCD=AD$，

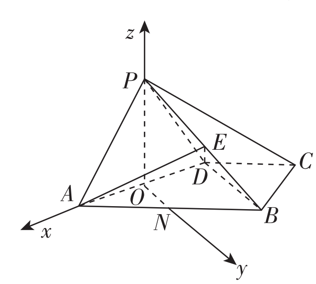
因为$OP\perp AD$，所以$OP\perp$平面$ABCD$，又$BD\subset$平面$ABCD$，

所以$OP\perp BD$，$OP\cap AD=O$，且OP，$AD\subset$平面PAD，

所以$BD\perp$平面PAD. ……………………………………………………………………… 5分

因为$AP\subset$平面PAD，所以$AP\perp BD$. ……………………………………………………… 6分

(Ⅱ)如图所示取AB的中点N，所以$ON\parallel BD$，$ON\perp AD$，



由(Ⅰ)可知$OP\perp$平面$ABCD$.

所以AD，ON，OP两两垂直，所以以O为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

因为$AB=2BC=2CD=2PD=2$，

所以$A(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$B(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0)$，$D(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$P(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

$E(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})$. ………………………………………………………… 8分

由(Ⅰ)可知平面ADP的一个法向量为$\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{2},0)$，………………………………… 9分

设平面 ADE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})$，

所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x=0\\ -\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{4}z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则 $x=0$，$z=-2$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-2)$. ······ 11 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BD}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BD}|}\right|=\left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，由图可知二面角 $E-AD-P$ 为锐二面角，

所以二面角 $E-AD-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ······ 12 分

19.【解析】(Ⅰ)依题意，甲、乙两组的消防员人数之比为 $(3+5):(2+2)=2:1$，······ 1 分

所以从甲组抽取的消防队员人数为 $\frac{2}{3}\times3=2$，从乙组抽取的消防队员人数为 $\frac{1}{3}\times3=1$. ······ 3 分

设"从甲组抽取的消防员中恰有 1 名青年"为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_5^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$，······ 5 分

故从甲组抽取的消防员中恰有 1 名青年的概率为 $\frac{15}{28}$. ······ 6 分

(Ⅱ)随机变量 X 的所有取值为 0，1，2，3，······ 7 分

$P(X=0)=\frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_4^1}=\frac{5}{28}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_4^1}+\frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_4^1}=\frac{25}{56}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_4^1}+\frac{C_3^1\cdot C_5^1\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_4^1}=\frac{9}{28}$，$P(X=3)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_8^2\cdot C_4^1}=\frac{3}{56}$. ······ 9 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{25}{56}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{56}$

$E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{25}{56}+2\times\frac{9}{28}+3\times\frac{3}{56}=\frac{5}{4}$. ······ 12 分

20.【解析】(Ⅰ)因为方程 $2x^2-3\sqrt{2}x+2=0$ 的解为 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\sqrt{2}$，所以椭圆的离心率为 $e_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，双曲线的离心率为 $e_2=\sqrt{2}$. ······ 2 分

由于 $e_2^2=\frac{m^2+n^2}{m^2}=2$，所以 $\frac{n^2}{m^2}=1$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$. ······ 3 分

设椭圆的一个焦点为 $F(0,c)$，因为椭圆的焦点到双曲线渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|c|}{\sqrt{1+1}}$，解得 $c=1$. ······ 4 分

由于 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{a}$，所以 $a=\sqrt{2}$，所以椭圆的方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$. ······ 6 分

(Ⅱ)由题可知直线 EF 的斜率存在且不为 0，设直线 EF 的方程为 $y=kx+m$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，

则把 $y=kx+m$ 代入 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$ 得：$(k^2+2)x^2+2kmx+m^2-2=0$，

所以 $\Delta=4k^2m^2-4(k^2+2)(m^2-2)>0$，即 $k^2+2>m^2$，

则 $x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2+2}$，$x_1x_2=\frac{m^2-2}{k^2+2}$，

因为 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=-1$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=-1$，即 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=-1$，

所以 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=-1$，所以 $(1+k^2)(\frac{m^2-2}{k^2+2})+km(-\frac{2km}{k^2+2})+m^2=-1$，

$m^2-2+m^2k^2-2k^2-2m^2k^2+m^2k^2+2m^2=-k^2-2$，即 $3m^2=k^2$ 满足 $k^2+2>m^2$. …………………… 10 分

所以 $k=\sqrt{3}m$ 或 $k=-\sqrt{3}m$，所以直线 EF 的方程为 $y=\sqrt{3}mx+m=\sqrt{3}m(x+\frac{\sqrt{3}}{3})$ 或

$y=-\sqrt{3}mx+m=\sqrt{3}m(-x+\frac{\sqrt{3}}{3})$，所以直线 EF 经过定点 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$ 或 $(\frac{\sqrt{3}}{3},0)$. …………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax+b\ln x-1$，所以 $f'(x)=x+2a+\frac{b}{x}(x>0)$， …………………… 1 分

所以 $\begin{cases}f'(1)=0\\ f(1)=\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}2a+b+1=0\\ \frac{1}{2}+2a-1=\frac{1}{2}\end{cases}$，所以 $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$，

所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2\ln x-1$. …………………… 2 分

(Ⅱ)因为 $g(x)=m[f(x)-\frac{1}{2}x^2+1]+x^2+3m\ln x=m(x-2\ln x)+x^2+3m\ln x=x^2+m(x+\ln x)$，

(ⅰ)①当 $m=0$ 时，$g(x)=x^2$，因为 $x>0$，所以点 (x,x^2) 在第一象限，

依题意，$g(x)=x^2+m(x+\ln x)>0$. …………………… 3 分

②当 $m>0$ 时，由对数函数性质知，$x\in(0,1)$ 时，$\ln x\in(-\infty,0)$，$m\ln x\in(-\infty,0)$，

从而"$\forall x>0, g(x)=x^2+m(x+\ln x)>0$"不成立. …………………… 4 分

③当 $m<0$ 时，由 $g(x)=x^2+m(x+\ln x)>0$ 得 $\frac{1}{m}<-(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln x)$，

设 $h(x)=-(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln x)$，$h'(x)=\frac{x-1}{x^3}+\frac{2}{x^3}\ln x$. …………………… 5 分

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$h(x)\geqslant h(1)=-1$，从而 $\frac{1}{m}<[-(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln x)]_{\min}$，即 $\frac{1}{m}<-1$，所以 $-1<m<0$.

综上所述，实数 m 的取值范围为 $-1<m\leqslant 0$. …………………… 6 分

(ⅱ)根据 $g(x)=x^2+m(x+\ln x)>0$ 计算得 $\frac{g(\mathrm{e})-g(1)}{\mathrm{e}-1}=\mathrm{e}+1+m+\frac{m}{\mathrm{e}-1}$，

设函数 $d(x)=g'(x)-\frac{g(\mathrm{e})-g(1)}{\mathrm{e}-1}=2x-(\mathrm{e}+1)+\frac{m}{x}-\frac{m}{\mathrm{e}-1}$. …………………… 7 分

$d(1)=1-\mathrm{e}+m-\frac{m}{\mathrm{e}-1}=\frac{m(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}-1}$，$d(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1+\frac{m}{\mathrm{e}}-\frac{m}{\mathrm{e}-1}=\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^2-m}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}$，

当 $m>\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^2$ 或 $m<\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}-2}$ 时，$d(1)d(\mathrm{e})=-\frac{[m(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)^2][m-\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^2]}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^2}<0$，

因为 $y=d(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，所以存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使 $d(x_0)=0$，

即 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使 $g'(x_0)=\frac{g(\mathrm{e})-g(1)}{\mathrm{e}-1}$； …………………… 9 分

当 $\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}-2}\leqslant m\leqslant \mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^2$ 时，$d(1)$、$d(\mathrm{e})\geqslant 0$，而且 $d(1)$、$d(\mathrm{e})$ 之中至少一个为正，

由均值不等式知，$d(x)\geqslant 2\sqrt{2m}-\frac{m+\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}-1}$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{m}{2}}\in(1,\mathrm{e})$ 时等号成立，

所以 $d(x)$ 有最小值 $d(\frac{m}{2})=2\sqrt{2m}-\frac{m+\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}-1}=\frac{-m+2(\mathrm{e}-1)\sqrt{2m}-(\mathrm{e}^2-1)}{\mathrm{e}-1}$，

且 $d(\frac{m}{2})=\frac{-[\sqrt{m}-\sqrt{2}(e-1)]^2+(e-1)(e-3)}{e-1}<0$,

此时存在 $x_0\in(1,e)$($x_0\in(1,\sqrt{\frac{m}{2}})$ 或 $x_0\in(\sqrt{\frac{m}{2}},e)$),使 $d(x_0)=0$. ………………………………… 10 分

综上所述,$\forall m\in\mathbf{R}$,存在 $x_0\in(1,e)$,使 $g'(x_0)=\frac{g(e)-g(1)}{e-1}$. ………………………………… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)因为 BE 是圆 O 的切线,所以$\angle EBC=\angle BAC$, ………………………………… 1 分
四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形,所以$\angle CBD=\angle CAD$, ………………………………… 2 分
因为 BC 是$\angle EBD$ 的角平分线,所以$\angle CBD=\angle EBC$, ………………………………… 3 分
所以$\angle CAD=\angle BAC$,所以 AC 是$\angle BAD$ 的角平分线. ………………………………… 5 分
(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$\angle EBC=\angle CBD=\angle BAC=\angle BDC$,所以 $BC=CD$, ………………………………… 6 分
因为$\angle BEC=\angle BEC$,所以$\triangle BEC\backsim\triangle AEB$,所以$\frac{EC}{EB}=\frac{BC}{AB}$, ………………………………… 8 分
所以 $EB\cdot BC=AB\cdot EC$,所以 $EB\cdot CD=AB\cdot EC$. ………………………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$, ………………………………… 1 分
所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=1$,即 $\rho^2=1$,所以 $\rho=1$, ………………………………… 3 分

由$\begin{cases}x=3\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$可得$\begin{cases}\frac{x}{3}=\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$,所以$\frac{x^2}{9}+y^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

所以曲线 C_2 的普通方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho>0)$,所以射线与 C_1 的交点为 $A(1,\frac{\pi}{6})$,与 C_2 的交点为 $B(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$,

曲线 C_2 与 x 轴正半轴的交点为 $M(3,0)$, ………………………………… 7 分

所以 $S_{\triangle OBM}=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, ………………………………… 9 分

所以 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle OBM}-S_{\triangle OAM}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$. ………………………………… 10 分

24.【解析】(Ⅰ)因为 $a=1$,所以 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$,

即 $f(x)=\begin{cases}-3x,x<-1\\-x+2,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\3x,x>\frac{1}{2}\end{cases}$. ………………………………… 1 分

由 $f(x)\leqslant3$ 可得①$\begin{cases}x<-1\\-3x\leqslant3\end{cases}$或②$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\-x+2\leqslant3\end{cases}$或③$\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\3x\leqslant3\end{cases}$, ………………………………… 3 分

解得①无解,②$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,③$\frac{1}{2}<x\leqslant1$,所以 $f(x)\leqslant3$ 的解集为$\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$. ………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $x>1,a>0$,所以 $f(x)=|2x-1|+|x+a|=3x+a-1=3$,
即 $3x+a=4$. ………………………………… 7 分
因为 $x^2+a^2=\frac{1}{10}(x^2+a^2)(9+1)\geqslant\frac{1}{10}(3x+a)^2=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$, ………………………………… 9 分

所以 $m\leqslant\frac{8}{5}$. ………………………………… 10 分

(二)

1. B 【解析】因为 $A=\{x|\frac{2-x}{x+1}\geqslant0\}=\{x|-1<x\leqslant2\}$,$B=\{x||x+1|>2\}=\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$,据图可知

阴影部分表示的集合为 $A\cap \complement_U B$，由于 $\complement_U B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap \complement_U B=\{x|-1<x\leqslant 1\}$.

2.B 【解析】因为 $\frac{z+i}{1-2i}=\frac{1+i}{2-i}$，所以 $z+i=\frac{1+i}{2-i}(1-2i)=\frac{3-i}{2-i}$，所以 $z+i=\frac{(3-i)(2+i)}{5}=\frac{7+i}{5}$，所以 $z=\frac{7+i}{5}-i=\frac{7-4i}{5}$.

3.A 【解析】甲中的数据都不小于乙中的数据，所以 $\overline{y_1}>\overline{y_2}$，但甲中的数据比乙中的数据波动幅度大，所以 $S_1>S_2$.

4.D 【解析】因为 $f(x)$ 是偶函数，所以图象关于 y 轴对称，又因为 $f(x+1)=f(3-x)$，所以 $f(5.5)=f(-1.5)$，$f(3.5)=f(0.5)=f(-0.5)$，因为 $x\in[-2,0]$ 时，函数 $f(x)$ 是减函数，所以 $f(-1.5)>f(-1)>f(-0.5)$，即 $f(5.5)>f(-1)>f(3.5)$.

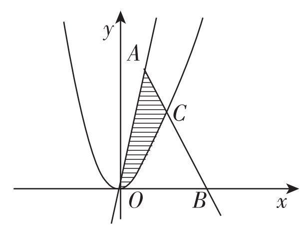
5.B 【解析】因为中国海洋大学和山东大学连在一起填报，所以把它们看作一个元素，浙江大学不和天津理工大学相邻，根据插空法排列，即 $A_2^2(A_3^3A_4^2-A_3^3A_3^1)=2\times 54=108$ 种填报方法.

6.B 【解析】根据三视图可知该几何体是由一个四分之一球和一个三棱锥组成，根据图中的数据可知半球的体积为 $V_1=\frac{1}{4}\times\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，三棱锥的体积为 $V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以该几何体的体积为 $V=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.A 【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$ 递增，设公差为 d，因为 $S_5=25$，a_2+1，a_4+1，a_7+3 成等比数列，所以可得 $\begin{cases}(a_1+3d+1)^2=(a_1+d+1)(a_1+6d+3)\\ a_1+2d=5\end{cases}$，解得 $d=2$，$a_1=1$，所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，所以 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

8.B 【解析】因为以 F_2 为圆心，a 为半径的圆被双曲线的一条渐近线截得的弦长为 $2b$，所以 $a^2=2b^2$，则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{3}{2}$，所以 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

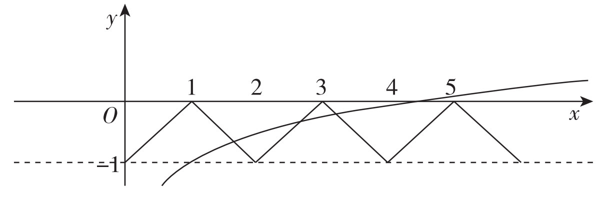
9.A 【解析】根据题意得到如图所示的△ABO，由 $\begin{cases}y=6x\\ y=8-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=6\end{cases}$，所以 $A(1,6)$，$B(4,0)$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 4\times 6=12$，由于 $\begin{cases}y=x^2\\ y=8-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$，所以 $C(2,4)$，所以阴影部分的面积为 $\int_0^1(6x-x^2)dx+\int_1^2(8-2x-x^2)dx=3-\frac{1}{3}+5-\frac{7}{3}=\frac{16}{3}$，所以 $P=\frac{16}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{4}{9}$.



10.B 【解析】因为 $n=2$，$s=m+4$，进入循环；$n=3$，$s=m+4-8=m-4$，进入循环；$n=4$，$m=s-4+16=m+12$，进入循环；$n=5$，$s=m+12-32=m-20$，退出循环，$y=\log_2(m-20)=2$，所以 $m-20=4\Rightarrow m=24$.

11.A 【解析】因为 $y=\frac{1}{4}x^2$，所以 $F_2(0,1)$，$F_1(0,-1)$，设 $P(x_0,y_0)(y_0>0)$，因为 $y=\frac{1}{4}x^2$，则 $y'=\frac{1}{2}x$，所以 $k=\frac{1}{2}x_0=\frac{y_0+1}{x_0}$，即 $\frac{1}{2}x_0^2=\frac{1}{4}x_0^2+1$，解得 $x_0=2$，$y_0=1$，所以切线方程为 $y=x-1$，所以 $E(1,0)$，所以 $PE=\sqrt{2}$，点 F_2 到直线 $y=x-1$ 的距离 $d=\frac{|0-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，所以 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

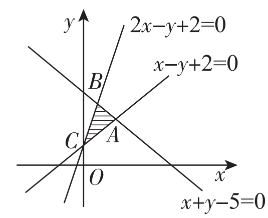
12.D 【解析】因为 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，由于 $f(x-1)=f(x+1)$，所以 $f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，又因为当 $0<x<1$ 时，$2f(x)+xf'(x)=e^x+xf(x)$，所以 $f'(x)=\frac{e^x+(x-2)f(x)}{x}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上



是增函数，因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant f(x)\leqslant 0$，由图象可知函数 $y=f(x)-\log_a x+1$ 至少有 4 个零点需满足 $\begin{cases}a>1\\ \log_a 5-1\leqslant 0\end{cases}$，即 $a\geqslant 5$.

13. 85 【解析】因为$(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=2^{5-r}C_5^r x^{5-r}x^{-\frac{1}{2}r}=2^{5-r}C_5^r x^{\frac{10-3r}{2}}$，所以当 $r=2$ 时，$T_3=2^3C_5^2x^2$，$r=4$ 时，$T_5=2C_5^4x^{-1}$，所以常数项为 $2^3C_5^2+\frac{1}{2}\times 2C_5^4=80+5=85$.

14. 2 【解析】不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分，令 $z=y-\frac{1}{2}x$，



所以直线 $y=\frac{1}{2}x+z$ 经过点 C 时，z 取得最小值，

所以$(y-\frac{1}{2}x)_{\min}=2$.

15. $\frac{3}{2}$ 【解析】因为 O 是圆心，所以延长 AO 交圆于点 D，则 $\angle ACD=\angle ABD=90^\circ$，$\cos\angle CAD=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AD}|}$，$\cos\angle BAD=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|}$，所以$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

16. $(n-1)2^n+1$ 【解析】因为 $S_n=a^n+b\Rightarrow a_1=a+b$，$a_2=a^2-a$，$a_3=a^3-a^2$，又因为 a_1,a_2,a_3 为等比数列，所以$a\neq 0$，$a\neq 1$，且公比为 a，所以 $a^2-a=a^2+ab\Rightarrow b=-1(a\neq 0)$，所以 $S_4=a^4-1$，即 $a^4-1=4(a^3-a^2)-1$，所以 $a^2=4(a-1)\Rightarrow a=2$，所以 $S_n=2^n-1$，解得 $a_1=1$，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-1-2^{n-1}+1=2^{n-1}$，即 $a_n=2^{n-1}$.
所以 $T_n=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}\cdots$①；$2T_n=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n\cdots$②.
①−②可得$-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n=(1-n)2^n-1$，所以 $T_n=(n-1)2^n+1$.

17.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x=\frac{a}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}(\cos 2\omega x+1)=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}\sin(2\omega x+\varphi)+\frac{1}{2}$，
………………………………………………………………………………………… 1 分

又因为函数 $f(x)$的图象的相邻两条对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$的最小正周期为 π，所以 $\pi=\frac{2\pi}{2\omega}\Rightarrow\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$，因为 $f(\frac{\pi}{2})+f(\frac{\pi}{3})=1$，所以$\frac{a}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+1)+\frac{a}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}(\cos\pi+1)=1$，所以$\frac{\sqrt{3}a}{4}=\frac{3}{4}$，

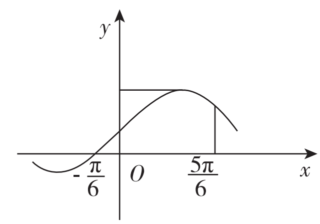
所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$， ……………………………………………… 4 分

当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3}$， ………………………………… 6 分

即 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $f(x)$单调递增，

所以函数 $f(x)$的单调递增区间是$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………… 8 分

(Ⅱ)当 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$时，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，令 $t=2x+\frac{\pi}{6}$，所以做出函数 $y=\sin t+\frac{1}{2}$的图象如图所示， ……………………………………………… 10 分



所以函数 $g(x)=f(x)+m$ 有两个零点，即函数 $y=f(x)$的图象和函数 $y=-m$ 的图象有两个不同的交点，所以 $1\leqslant -m<\frac{3}{2}$，即$-\frac{3}{2}<m\leqslant -1$. ……… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)因为 $AD\perp$底面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,所以 $AD\perp BC$, …………………………………… 1分

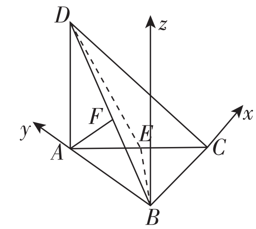
又因为 $BC\perp BD$,且 $AD\cap BD=D$,所以 $BC\perp$平面 ABD, …………………………………… 2分

因为 $AF\subset$平面 ABD,所以 $BC\perp AF$, …………………………………… 3分

又因为 $AF\perp BD$ 且 $BC\cap BD=B$,所以 $AF\perp$平面 BCD. …………………………………… 4分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$AB\perp BC$,所以以点 B 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系,

…………………………………… 5分



因为 $AF\perp BD$,$AF=\sqrt{3}$,$AB=2$,所以 $\sin\angle ABD=\frac{AF}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$\angle ABD=60^\circ$,所以 $AD=AB\tan60^\circ=2\sqrt{3}$,

所以 $B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$D(0,2,2\sqrt{3})$, …………………………………… 7分

由(Ⅰ)可知向量$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$为平面 ABD 的一个法向量, …………………………………… 8分

设平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$,

则$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{AC}=(2\lambda,2-2\lambda,0)$,$\overrightarrow{BD}=(0,2,2\sqrt{3})$,所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,

即$\begin{cases}2\lambda x+(2-2\lambda)y=0\\2y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$,令 $z=\sqrt{3}$,则 $y=-3$,$x=\frac{3}{\lambda}-3$,

所以 $\boldsymbol{n}=(\frac{3}{\lambda}-3,-3,\sqrt{3})$, …………………………………… 10分

由图可知二面角 $A-BD-E$ 是锐二面角,并设为 α,

所以 $\cos\alpha=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}\right|=\left|\frac{\frac{6}{\lambda}-6}{2\times\sqrt{(\frac{3}{\lambda}-3)^2+9+3}}\right|=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以$\frac{(\frac{3}{\lambda}-3)^2}{(\frac{3}{\lambda}-3)^2+12}=\frac{3}{7}$,所以$(\frac{3}{\lambda}-3)^2=9$,

因为 $0<\lambda<1$,所以$\frac{3}{\lambda}-3=3$,所以 $\lambda=\frac{1}{2}$,即点 E 为 AC 的中点. …………………………………… 12分

19.【解析】(Ⅰ)由频率分布直方图可知,$[25,30)$与$[30,35)$两组的人数相同,所以 $a=25$,

调查的总人数 $N=\frac{25}{0.02\times5}=250$, …………………………………… 2分

因为$[35,40)$的频率为 $0.08\times5=0.4$,所以共有 $0.4\times250=100$ 人,$[40,45)$的频率为 $0.06\times5=0.3$,

所以共有 $0.3\times250=75$ 人,所以抽样比为$\frac{7}{100+75}=\frac{1}{25}$,

所以在$[35,40)$中抽取 $100\times\frac{1}{25}=4$ 人,$[40,45)$中抽取 $75\times\frac{1}{25}=3$ 人. …………………………………… 4分

(Ⅱ)X 的可能取值为 0、1、2、3、4,因为抽取的 7 人中年龄在$[35,40)$和$[40,45)$的女性分别有 2 人和 1 人,

所以从$[35,40)$中抽取 1 人为女性的概率是$\frac{1}{2}$,从$[40,45)$中抽取 1 人为女性的概率是$\frac{1}{3}$. …………………………………… 6分

所以 $P(X=0)=C_2^0\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^0\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^0\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+C_2^0\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,

$P(X=2)=C_2^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^0\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+C_2^0\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{36}$,

$P(X=3)=C_2^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

$P(X=4)=C_2^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times C_2^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$. …………………………………… 10分

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{36}=\frac{5}{3}$. …………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)因为椭圆的离心率是$\frac{1}{2}$,所以$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,即$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即 $3a^2=4b^2$. ………………………… 1 分

因为抛物线 $y^2=\frac{\sqrt{3}}{4}x$ 上点 P 到该抛物线准线的距离为$\frac{17\sqrt{3}}{16}$,

所以 $x_p=\frac{17\sqrt{3}}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}=\sqrt{3}$,所以 $y_p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, …………………………………………………………… 2 分

又因为椭圆经过点 P,所以$\frac{3}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$,即$\frac{3}{a^2}+\frac{3}{3a^2}=1$,即 $a^2=4$,

所以 $a=2,c=1$,所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,所以 $F_1(-1,0)$,设过 $F_1(-1,0)$直线的方程为 $x=my-1$,

$M(x_0,0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-x_0,y_1)\cdot(x_2-x_0,y_2)=(my_1-1-x_0,y_1)\cdot(my_2-1-x_0,y_2)$

$=(m^2+1)y_1y_2-m(1+x_0)(y_1+y_2)+(1+x_0)^2$, ……………………………………………………… 6 分

联立$\begin{cases}x=my-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$可得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$, ………………………………………………………………… 8 分

所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_0^2-4+\frac{11+8x_0}{3m^2+4}$,

令 $11+8x_0=0$,解得 $x_0=-\frac{11}{8}$,所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\frac{135}{64}$, ………………………………………………… 10 分

所以当 M 点坐标为$(-\frac{11}{8},0)$时,$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$为定值$-\frac{135}{64}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $a=2$,所以 $f(x)=2\ln x-3x+x^2(x>0)$,

所以 $f'(x)=\frac{2}{x}-3+2x$, ………………………………………………………………………………… 1 分

所以 $k=f'(1)=2-3+2=1$,而 $f(1)=2\ln1-3+1=-2$, ……………………………………………… 2 分

所以 $y+2=x-1$,所以 $x-y-3=0$. ……………………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)因为 $h(x)=g(x)-f(x)=\frac{1+a}{x}+x^2-ax-[a\ln x-(a+1)x+x^2]=\frac{1+a}{x}+x-a\ln x(x>0)$,

所以 $h'(x)=1-\frac{a+1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-(a+1)}{x^2}=\frac{(x+1)[x-(a+1)]}{x^2}$. ……………………………… 4 分

①当 $a+1>0$ 时,即 $a>-1$ 时,在$(0,a+1)$上 $h'(x)<0$,在$(a+1,+\infty)$上 $h'(x)>0$,

所以 $h(x)$在$(0,a+1)$上单调递减,在$(a+1,+\infty)$上单调递增; ………………………………………… 5 分

②当 $a+1\leqslant0$,即 $a\leqslant-1$ 时,在$(0,+\infty)$上 $h'(x)>0$,

所以函数 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………………………………………………… 6 分

(Ⅲ)因为$\exists x_0\in[1,e]$,使得 $f(x_0)>g(x_0)$成立,即$\exists x_0\in[1,e]$,使得 $h(x_0)<0$ 成立,

所以函数 $h(x)=\frac{1+a}{x}+x-a\ln x$ 在$[1,e]$上的最小值小于零. ……………………………………………… 7 分

由(Ⅱ)可知

①当 $a+1\geqslant e$,即 $a\geqslant e-1$ 时,函数 $h(x)$在$[1,e]$上单调递减,

所以 $h(x)$的最小值为 $h(e)$,由 $h(e)=\frac{1+a}{e}+e-a\ln e<0$ 可得 $a>\frac{e^2+1}{e-1}$,

因为$\frac{e^2+1}{e-1}>e-1$,所以 $a>\frac{e^2+1}{e-1}$;…………………………………………………………… 9 分

②当 $a+1\leqslant 1$,即 $a\leqslant 0$ 时,函数 $h(x)$在$[1,e]$上单调递增,

所以 $h(x)$最小值为 $h(1)$,由 $h(1)=1+1+a<0$ 可得 $a<-2$; ………………………………… 10 分

③当 $1<a+1<e$,即 $0<a<e-1$ 时,可得 $h(x)$最小值为 $h(a+1)=a+2-a\ln(a+1)$,

因为 $0<\ln(a+1)<1$,所以 $0<a\ln(a+1)<a$,所以 $h(a+1)=a+2-a\ln(a+1)>2$,

此时 $h(a+1)<0$ 不成立.

综上讨论可得实数 a 的范围为:$a>\frac{e^2+1}{e-1}$或 $a<-2$. ……………………………………………… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)证明:因为 AB 是$\odot O$ 的直径,AE 是$\odot O$ 的切线,

所以 $AE\perp AB$.又因为 $CD\perp AB$,所以 $CD\parallel AE$, ……………………………………………… 2 分

所以$\triangle ABF\backsim\triangle DBH$,$\triangle EFB\backsim\triangle CHB$,

所以$\frac{AF}{DH}=\frac{BF}{BH}$,$\frac{EF}{CH}=\frac{BF}{HB}$.所以$\frac{AF}{HD}=\frac{EF}{CH}$, …………………………………………… 4 分

因为 F 是 AE 的中点,所以 $AF=EF$,所以 $CH=DH$. ……………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 AE 为该圆 O 的切线,EB 为该圆 O 的割线,所以 $AE^2=EC\cdot EB$,…………………… 6 分

所以 $4=EC(EC+3)$,所以 $EC=1$, ……………………………………………………………………… 7 分

又因为 AB 为圆 O 的直径,所以 $AC\perp BE$,所以 $AC=\sqrt{3}$,$AB=2\sqrt{3}$, ………………………… 9 分

由 $AC^2=AD\times AB$,所以 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)因为直线 l 经过点$(2,1)$且倾斜角为 $45°$,

所以直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数), ………………………………………………… 2 分

因为曲线 C 的极坐标方程为 $3\rho^2+\rho^2\cos 2\theta=4$,所以 $3\rho^2+\rho^2(2\cos^2\theta-1)=4$,

即 $\rho^2+\rho^2\cos^2\theta=2$,因为 $x=\rho\cos\theta$,$x^2+y^2=\rho^2$,

所以曲线 C 的直角坐标方程 $2x^2+y^2=2$. ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$,所以 $2(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=2$,

所以$\frac{3}{2}t^2+5\sqrt{2}t+7=0$, ……………………………………………………………………………… 6 分

所以 $t_1+t_2=-\frac{10\sqrt{2}}{3}$,$t_1t_2=\frac{14}{3}$,所以 $AB=|t_1-t_2|=\sqrt{\frac{200}{9}-\frac{14\times 4}{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,……………………… 8 分

而直线 l 的普通方程为 $x-y-1=0$,原点 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ………………… 9 分

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}$. ………………………………………………………… 10 分

24.【解析】(Ⅰ)因为 $a=1$,所以 $f(x)=\log_2(|x-2|+|x+1|-4)$,

所以$|x-2|+|x+1|-4>0$,可得①$\begin{cases}x<-1\\ -2x+1>4\end{cases}$或②$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2\\ 3>4\end{cases}$或③$\begin{cases}x>2\\ 2x-1>4\end{cases}$, ………………… 3 分

解得①$x<-\frac{3}{2}$,②无解,③$x>\frac{5}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x<-\frac{3}{2}\text{或 } x>\frac{5}{2}\right\}$. ……………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立,所以 $\log_2(|x-2|+|x+a|-4)\geqslant 1$ 恒成立,

即 $|x-2|+|x+a|-4\geqslant 2$ 恒成立,所以 $|x-2|+|x+a|\geqslant 6$, ……………………………………… 6 分

因为 $|x-2|+|x+a|\geqslant|2-x+x+a|=|a+2|$,所以 $|a+2|\geqslant 6$, …………………………………… 8 分

所以 $a\geqslant 4$ 或 $a\leqslant -8$,因为 $a>0$,所以 $a\geqslant 4$. ……………………………………………………… 10 分

(三)

1.D 【解析】由 $x-1>0$,得 $x>1$,所以 $A\cap B=\{2,3\}$.

2.C 【解析】因为 $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以对应的点 $(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ 位于第三象限.

3.B 【解析】设双曲线的方程为 $x^2-4y^2=\lambda,\lambda>0$,即 $\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1$,由题意知 $\frac{\lambda}{4}+\lambda=5$,所以 $\lambda=4$,双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

4.D 【解析】后三组的频率之比为 6∶5∶1,所以最后一组应抽取 $\frac{1}{6+5+1}\times 48=4$ 人.

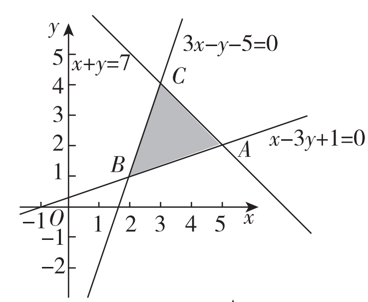
5.C 【解析】由程序框图的循环结构得输出的 x 为 12.

6.A 【解析】由题意知 $f(x)$ 的最小正周期为 π,所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,因为当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时,$f(x)$ 取得最大值,所以 $f(x)=\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=1$,又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$,令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,∴ $f(x)$ 的单调减区间为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7}{12}\pi+k\pi],k\in\mathbf{Z}$.

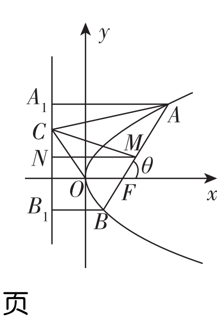
7.C 【解析】若 $q=1$,则有 $S_3=3a_1,S_6=6a_1,S_9=9a_1$,由 $a_1\neq 0$,不满足 $2S_9=S_6+S_3$,所以 $q\neq 1$,又依题意 $2S_9=S_6+S_3$,可得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$,所以 $1-q^3+(1-q^3)(1+q^3)=2(1-q^3)(1+q^3+q^6)$,即 $1+1+q^3=2(1+q^3+q^6)$,$q^3=-\frac{1}{2}$,由 $a_2+a_5=2a_m$,得 $a_2+a_2q^3=2a_2q^{m-2}$,$\frac{1}{2}=2\times(q^3)^{\frac{m-2}{3}}=2\times(-\frac{1}{2})^{\frac{m-2}{3}}$,得 $m=8$.

8.B 【解析】从 B,D,F 三个人中任选出 2 个看作一个“整体”,方法有 $\mathrm{A}_3^2=6$ 种,先排 A,C,E 有 $\mathrm{A}_3^3=6$ 种,形成了 4 个空,将整体和另一个人插在四个空之间,有 $\mathrm{A}_4^2=12$ 种,所以满足此条件的排法有 $6\times 6\times 12=432$ 种,若 A 排在两端,有 $\mathrm{A}_2^1\mathrm{A}_2^2=4$ 种,形成了 3 个空,将整体和另一个人插在形成的 3 个空中,有 $\mathrm{A}_3^2=6$ 种,满足此条件的排法有 $6\times 4\times 6=144$ 种,所以满足条件的排法有 $432-144=288$ 种.

9.C 【解析】不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分所示,根据目标函数的几何意义可知,目标函数在点 $A(5,2)$,$B(2,1)$,$C(3,4)$ 三个点中取得最大值或最小值,所以要使 $2\leqslant ax+y\leqslant 6$ 恒成立,只需满足 $\begin{cases}2\leqslant 5a+2\leqslant 6\\2\leqslant 2a+1\leqslant 6\\2\leqslant 3a+4\leqslant 6\end{cases}$,解得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

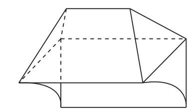


10.C 【解析】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$,设 AB 的中点为 M,过 A、B、M 分别作 AA_1、BB_1、MN 垂直于直线 $x=-1$ 于 A_1、B_1、N,设 $\angle AFx=\theta$,由抛物线的定义可知 $|MN|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)=\frac{1}{2}|AB|$,因为 $|MC|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$,$|MN|=\frac{1}{\sqrt{3}}|MC|$,

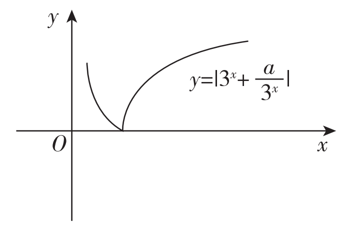


$\angle CMN=90^{\circ}-\theta$，所以 $\cos\angle CMN=\cos(90^{\circ}-\theta)=\dfrac{|MN|}{|MC|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，即 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，根据对称性可知 AB 斜率为 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11. B 【解析】由三视图可知，该几何体的下半部分是长方体中去掉一个 $\dfrac{1}{4}$ 圆柱，上半部分是一个三棱柱与两个四棱锥的组合体(如图所示)，该几何体的体积为 $V=4\times4\times8-\dfrac{1}{4}\times\pi\times4^2\times8+2\times\dfrac{1}{3}\times2\times4\times3+\dfrac{1}{2}\times4\times3\times4=168-32\pi$.



12. C 【解析】当 $a\geqslant0$ 时，$a_n=3^n+\dfrac{a}{3^n}$，由 $\{a_n\}$ 单调递增得 $a_{n+1}=3^{n+1}+\dfrac{a}{3^{n+1}}>a_n=3^n+\dfrac{a}{3^n}$，整理得 $a<3^{2n+1}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，所以 $0\leqslant a<27$；



当 $a<0$ 时，$3^x+\dfrac{a}{3^x}$ 为单调增函数，令 $3^x+\dfrac{a}{3^x}=0$，得 $3^x=-\dfrac{a}{3^x}$，

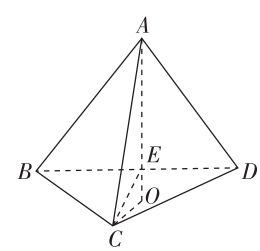
$x=\dfrac{1}{2}\log_3(-a)$，$y=|3^x+\dfrac{a}{3^x}|$ 的图象如图所示，所以数列 $\{a_n\}$ 只需满足

$1\geqslant\dfrac{1}{2}\log_3(-a)$ 或者 $1<\dfrac{1}{2}\log_3(-a)<2$ 且 $a_2>-a_1$，即 $\dfrac{1}{2}\log_3(-a)\leqslant1$ 或者 $\begin{cases}3^2<-a<3^4\\3^2+\dfrac{a}{3^2}>-(3+\dfrac{a}{3})\end{cases}$ 时，$\{a_n\}$ 单调递增，解得 $-27<a<0$，综上所述 $-27<a<27$.

13. 4 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2=0$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$.

14. 9 【解析】依题意，展开式中的常数项为 $a^6+C_6^2\cdot2^2\cdot C_4^1\cdot a^3+C_6^4\cdot2^4=1$，故 $a^6+240a^3+239=0$，故 $(a^3+239)(a^3+1)=0$，因为 $a\in\mathbf{Z}$，故 $a=-1$，故 $\int_a^2(2x^3+x)dx=\int_{-1}^2(2x^3+x)dx=(\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{x^2}{2})|_{-1}^{2}=9$.

15. 9π 【解析】如图，取 BD 的中点 E，连接 AE，CE，则 $AE\perp BD$，$CE\perp BD$，因为 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，所以 E 为 $\triangle BCD$ 外接圆的圆心，因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，所以 $AE\perp$ 平面 BCD，设 $A-BCD$ 外接球的球心为 O，半径 R，在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，由 $BC=CD=2$，得 $BD=2\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{2}$，所以 $AE=\sqrt{3-2}=1$，则 $R^2=2+(R-1)^2$，解得 $R=\dfrac{3}{2}$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=9\pi$.



16. $a>-e\ln4$ 【解析】当 $x=1$ 时，不等式显然成立，$a\in\mathbf{R}$，当 $0<x<1$ 时，由 $4^{\frac{1}{x}}>x^a$，得 $\dfrac{1}{x}\cdot\ln4>a\ln x$，即 $\dfrac{1}{x\ln x}<\dfrac{a}{\ln4}$，令 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$，则 $f'(x)=\dfrac{-(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{1}{e}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>\dfrac{1}{e}$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{e},1)$ 上单调递减，$f(x)_{\max}=f(\dfrac{1}{e})=-e$，$a>-e\ln4$.

17.【解析】(Ⅰ)由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-1}{2ab}=\dfrac{7}{8}$，

即 $a^2+b^2-1=\dfrac{7}{4}ab$，所以 $(a+b)^2-2ab-1=\dfrac{7}{4}ab$，即 $ab=4$，

由 $\begin{cases}a+b=4\\ab=4\end{cases}$，得 $a=b=2$. ………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{7}{8}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-(\dfrac{7}{8})^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}}{1}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

又 $A=B$，所以 $0<A<\frac{\pi}{2}$，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{1}{4}$，

所以 $\sin(A-C)=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$. ………………………………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)由题意知 $a=\frac{25}{50}=0.5$，$b=\frac{15}{50}=0.3$. ……………………………………………………………………… 2 分

(Ⅱ)①依题意，随机选取一名顾客，命中 B 区域的概率为 0.5，

设 5 名顾客中有 Y 名命中 B 区域，则 $Y\sim B(5,0.5)$，

所以 $P(Y=2)=C_5^2\times0.5^2\times(1-0.5)^3=0.3125$. ………………………………………………………… 5 分

②X 的可能取值为 4，5，6，7，8，

$P(X=4)=0.2^2=0.04$，

$P(X=5)=2\times0.2\times0.5=0.2$，

$P(X=6)=0.5^2+2\times0.2\times0.3=0.37$，

$P(X=7)=2\times0.3\times0.5=0.3$，

$P(X=8)=0.3\times0.3=0.09$，

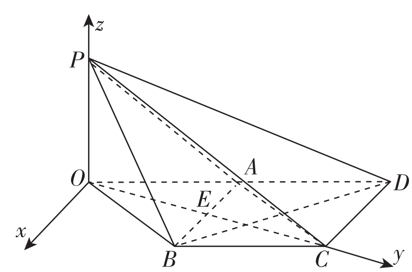
所以 X 的分布列为：

X	4	5	6	7	8
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

……… 11 分

$EX=4\times0.04+5\times0.2+6\times0.37+7\times0.3+8\times0.09=6.2$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(Ⅰ)证明：连接 AC，



因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

由 E 为 AB 的中点，所以 $OC\perp AB$，

又 $AB/\!/CD$，所以 $OC\perp CD$，$AE/\!/CD$，$AE=\frac{1}{2}CD$，

又由题意知 $\angle ADC=60°$，所以 A 为 OD 的中点，

所以 $AB=AO=\frac{1}{2}OD$，得 $BD\perp BO$，

又 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PO\perp BD$，又 $PO\cap BO=O$，PO，$BO\subset$ 平面 POB，

所以 $BD\perp$ 平面 POB，

因为 $BD\subset$ 平面 PBD，所以平面 $PBD\perp$ 平面 POB. ……………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $AB=a$，过点 O 作 OC 的垂线为 x 轴，OC 所在的直线为 y 轴，OP 所在的直线为 z 轴，

建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $O(0,0,0)$，$P(0,0,\frac{a}{2})$，$A(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，$B(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，$C(0,\sqrt{3}a,0)$，

$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{3}a,-\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a,0)$，

由(Ⅰ)知 $AB\perp OC$，由 $PO\perp$ 底面 $ABCD$，得 $PO\perp AB$，

所以 $AB\perp$ 平面 POC，即 $\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$ 是平面 PCO 的一个法向量，

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\sqrt{3}y-\frac{1}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(-3,\sqrt{3},6)$，

则 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-3a}{4\sqrt{3}a}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$， ……………………………………………………………… 10 分

所以平面 PAC 与平面 PCO 所成的锐二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{4}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)令 $y=c$,得 $x=\frac{b^2}{a}$,由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}\times c\times\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$,

解得 $b=\sqrt{6}$,$c=\sqrt{2}$,$a=2\sqrt{2}$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{8}+\frac{x^2}{6}=1$. ……………………………………………… 4 分

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,则由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OP}$ 知,

$x_1+x_2=\lambda x_0$,$y_1+y_2=\lambda y_0$,且 $\frac{y_0^2}{8}+\frac{x_0^2}{6}=1$,

又直线 l:$y=k(x+t)$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 相切,则有 $\frac{|kt+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,

由 $k=\frac{2t}{1-t^2}(t\neq 0,t\neq\pm 1)$,

联立 $\begin{cases}y=k(x+t)\\4x^2+3y^2=24\end{cases}$,得 $(4+3k^2)x^2+6k^2tx+3k^2t^2-24=0$,

且 $\Delta=36k^4t^2-4(4+3k^2)(3k^2t^2-24)>0$ 恒成立,$x_1+x_2=-\frac{6k^2t}{4+3k^2}$,

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2kt=\frac{8kt}{4+3k^2}$,所以 $P(-\frac{6k^2t}{\lambda(4+3k^2)},\frac{8kt}{\lambda(4+3k^2)})$,

代入椭圆方程得 $\frac{6k^4t^2}{\lambda^2(4+3k^2)^2}+\frac{8k^2t^2}{\lambda^2(4+3k^2)^2}=1$,所以 $\lambda^2=\frac{2k^2t^2}{4+3k^2}$,

所以 $\lambda^2=\frac{2k^2t^2}{4+3k^2}=\frac{2}{(\frac{1}{t^2})^2+\frac{1}{t^2}+1}$,

又 $t^2>0$,且 $t^2\neq 1$,所以 $(\frac{1}{t^2})^2+\frac{1}{t^2}+1>1$,且 $(\frac{1}{t^2})^2+\frac{1}{t^2}+1\neq 3$,所以 $0<\lambda^2<2$,且 $\lambda^2\neq\frac{2}{3}$,

所以实数 λ 的取值范围为 $(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{6}}{3})\cup(-\frac{\sqrt{6}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{6}}{3})\cup(\frac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{2})$. ………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)由题意知 $f'(x)=(x-m)e^x=1$ 在 $(1,+\infty)$ 有解,

$m=x-\frac{1}{e^x}$,而 $y=x-\frac{1}{e^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数,所以 $m>1-\frac{1}{e}$. ………………………………………… 2 分

(Ⅱ)$f'(x)=(x-m)e^x$,

当 $m\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增;

当 $0<m<2$ 时,令 $f'(x)<0$,$0<x<m$,令 $f'(x)>0$,$m<x<2$,

所以 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上单调递减,在 $[m,2]$ 上单调递增;

当 $m\geqslant 2$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减. …………………………………………………………… 6 分

(Ⅲ)$g(x)=(x-1)e^x-kx^2$,其中 $k\geqslant 0$,

所以 $g'(x)=e^x+(x-1)e^x-2kx=x(e^x-2k)$,

当 $x<1$ 时,$g(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上无零点,

所以只需判断 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的零点个数,

若 $k\in[0,\frac{e}{2}]$,当 $x\geqslant 1$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $g(1)=-k\leqslant 0$,$g(2)=e^2-4k\geqslant e^2-2e>0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有且只有一个零点;

若 $k\in(\frac{e}{2},+\infty)$,则当 $x\geqslant\ln 2k$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,当 $1\leqslant x<\ln 2k$ 时,$g'(x)<0$,

则 $g(x)$ 在 $[1,\ln 2k)$ 上单调递减,在 $[\ln 2k,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $g(1)=-k\leqslant 0$,$g(k+1)=ke^{k+1}-k(k+1)^2=k[e^{k+1}-(k+1)^2]$,

令 $F(t)=e^t-t^2$,$t=k+1>2$,则 $F'(t)=e^t-2t$,

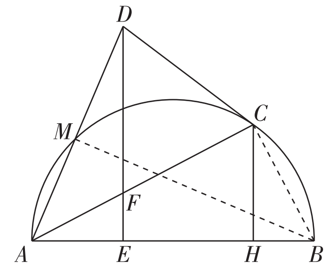
令 $G(t)=e^t-2t$,则 $G'(t)=e^t-2>0$,

所以 $F'(t)$ 单调递增,$F'(t)>e^2-4>0$,

所以 $g(1+k)>0$,$g(x)$ 在$[1,+\infty)$上有且只有一个零点,

综上所述,函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上只有一个零点. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】证明:(Ⅰ)连结 BC,



因为 CD 是圆的切线,AC 是弦,所以$\angle DCF=\angle CBA$,

因为 $DF=DC$,所以$\angle DCF=\angle DFC$,$\angle DFC=\angle CBA$,

又因为 $CH\perp AB$,$\angle ACB=90°$,所以$\triangle ACH\backsim\triangle ABC$,

所以$\angle ACH=\angle CBA$,$\angle ACH=\angle DFC$,$DE/\!/CH$. ……………………… 5 分

(Ⅱ)设 AD 与半圆交于点 M,连结 BM,

因为 CD 是圆的切线,所以 $DC^2=DA\cdot DM$,

又因为 $DE\perp AB$,$\angle AMB=90°$,所以$\triangle AED\backsim\triangle AMB$,

所以$\dfrac{AE}{DA}=\dfrac{AM}{AB}$,即 $AE\cdot AB=DA\cdot AM$,

所以 $DA^2-DF^2=DA^2-DC^2=DA^2-DA\cdot DM=DA\cdot(DA-DM)=DA\cdot AM=AE\cdot AB$. ……… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)利用极坐标公式,把曲线 C 的极坐标方程 $\rho=2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$ 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$,

所以普通方程是 $x^2+y^2=2y+2x$,即$(x-1)^2+(y-1)^2=2$. ……………………………………………… 4 分

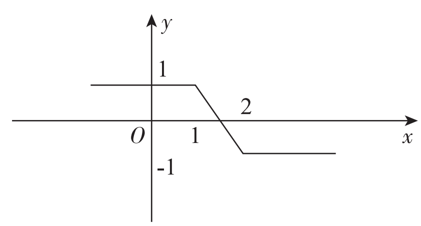
(Ⅱ)直线与曲线 C 交于 A,B 两点,与 y 轴交于点 P,

把直线的参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),

代入曲线 C 的普通方程$(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 中,得 $t^2-t-1=0$,所以$\begin{cases}t_1+t_2=1\\ t_1\cdot t_2=-1\end{cases}$.

所以$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{5}$. ………………………………… 10 分

24.【解析】(Ⅰ)函数 $f(x)=|x-2|-|x-1|=\begin{cases}1,x\leqslant 1\\ -2x+3,1<x<2,\\ -1,x\geqslant 2\end{cases}$



由图象知函数 $f(x)$ 的值域为$[-1,1]$. ……………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $m=1$,则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1$,

$a+2b+3c=(a+2b+3c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c})$

$=1+1+1+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2b}+\dfrac{3c}{a}+\dfrac{a}{3c}+\dfrac{2b}{3c}+\dfrac{3c}{2b}$,

而$\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2b}\geqslant 2$,$\dfrac{3c}{a}+\dfrac{a}{3c}\geqslant 2$,$\dfrac{2b}{3c}+\dfrac{3c}{2b}\geqslant 2$,所以 $a+2b+3c\geqslant 9$,

当且仅当$\begin{cases}a=2b=3c\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1\end{cases}$,即 $a=3$,$b=\dfrac{3}{2}$,$c=1$ 时等号成立. ……………………………………… 10 分

(四)

1. D 【解析】因为 $A=\{x|x^2-2x<0\}=(0,2)$,$B=(-\infty,0)$,所以 $A\cup B=(-\infty,0)\cup(0,2)$.

2. A 【解析】由$(z+3)(5-2i)=|2+5i|^2$,得 $z=\dfrac{29}{5-2i}-3=\dfrac{29(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}-3=2+2i$,所以 $\bar{z}=2-2i$.

3. D 【解析】该抛物线的焦点在 y 上,又因为其准线方程为 $y=-1$,所以 $p=2$,$A(4,4)$,由抛物线的性质可知

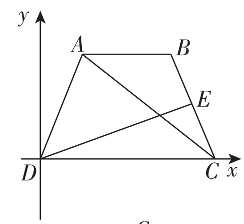
$AF=4+1=5$.

4.A 【解析】函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$图象向左平移$\frac{\pi}{5}$个单位得 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{5}+\varphi)$，由于函数图象关于原点对称，所以函数 $f(x)$为奇函数，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi+\frac{2\pi}{5}=0$，得 $\varphi=-\frac{2\pi}{5}$.

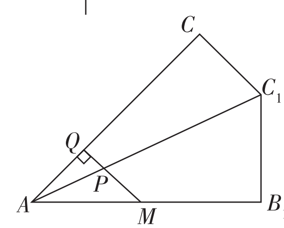
5.B 【解析】第一次循环 $S=1,i=2,A=3$，第二次循环 $S=\frac{4}{3},i=3,A=6$，第三次循环 $S=\frac{3}{2},i=4,A=10$，第四次循环 $S=\frac{8}{5},i=5,A=15$，第五次循环 $S=\frac{5}{3},i=6>5$，输出$\frac{5}{3}$.

6.C 【解析】①正确；$(x-3)(x-4)=0$ 是 $x-3=0$ 的必要不充分条件，②错误；由逆否命题的定义知③正确；因为 $P(\xi\leqslant 2)=0.5,P(\xi<4)=0.8$，所以 $P(0<\xi<2)=P(2<\xi<4)=P(\xi<4)-P(\xi<2)=0.3$，故④正确.

7.B 【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，由已知得 $D(0,0),A(1,\sqrt{3}),B(3,\sqrt{3})$，$C(4,0)$，因为 E 是 BC 的中点，所以 $E(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=3\times\frac{7}{2}+(-\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$.

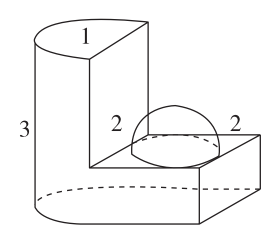


8.B 【解析】由题意知，平面 $ACC_1\perp$平面 $ABCD$，要使 $MP+PQ$ 最小，只需考虑 Q 在线段 AC 上运动，故将三角形 ACC_1 和三角形 AB_1C_1 展开，如图所示，$AB_1=\sqrt{3}$，$AC_1=2,AC=\sqrt{3}$，易知$\angle B_1AC_1=\angle CAC_1=30^\circ$，$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可知 $MQ\perp AC$ 时，$MP+PQ$ 最小，最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 60^\circ=\frac{3}{4}$.

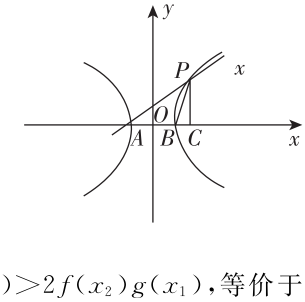


9.C 【解析】由余弦定理得 $\frac{2\sin C-\sqrt{3}\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2\sqrt{3}ac\cos B}{2bc\cos A}=\frac{\sqrt{3}a\cos B}{b\cos A}$，由正弦定理得$\frac{2\sin C-\sqrt{3}\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin A\cos B}{\sin B\cos A}$，即 $2\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos B$，$2\sin C\cos A=\sqrt{3}\sin C$，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A=\frac{\pi}{6}$.

10.C 【解析】如图所示，由三视图可知，该几何体左侧是一个半圆柱，底面的半径是 1，高为 3，右侧下面是一个正四棱柱，四棱柱的底面是一个正方形，边长是 2，四棱柱的高为 1，右侧上面是半球，所以该几何体的体积为$\frac{1}{2}\pi\times 1^2\times 3+2\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 1^3=4+\frac{13}{6}\pi$.



11.A 【解析】因为 $x-\sqrt{3}y+a=0$ 过点 $A(-a,0)$且斜率为 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以其倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，如图所示，过点 P 作 $PC\perp x$ 轴，因为$|AB|=|PB|=2a$，所以$\angle PBC=\frac{\pi}{3}$，$BC=a$，$y_P=\sqrt{3}a$，点 $P(2a,\sqrt{3}a)$，将 P 代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中得 $a=b$，所以其渐近线方程为 $x\pm y=0$.



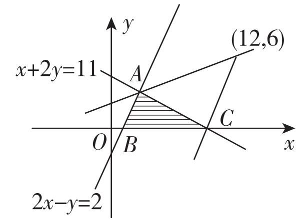
12.D 【解析】设 $\varphi(x)=\frac{x^2+(1-t)x+1}{e^x}$，若存在实数 $x_1,x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)g(x_2)>2f(x_2)g(x_1)$，等价于 $x\in[0,1]$满足 $2\varphi(x)_{\min}<\varphi(x)_{\max}$，$\varphi'(x)=\frac{-x^2+(1+t)x-t}{e^x}=-\frac{(x-t)(x-1)}{e^x}$，当 $t\geqslant 1$ 时，$\varphi'(x)\leqslant 0$，即 $\varphi(x)$在$[0,1]$上单调递减，所以 $2\varphi(1)<\varphi(0)$，故 $t>3-\frac{e}{2}>1$；当 $t\leqslant 0$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$，即 $\varphi(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以 $2\varphi(0)<\varphi(1)$，故 $t<3-2e<0$；当 $0<t<1$ 时，$\varphi(x)$在$[0,t]$上单调递减，$\varphi(x)$在$[t,1]$上单调递

增，故 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(t)=\frac{t+1}{e^{t}}$，而 $\varphi'(t)=-\frac{t}{e^{t}}$，即 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，故 $\varphi(1)<\varphi(t)<\varphi(0)$，即 $\frac{2}{e}<\varphi(t)<1$，即 $\frac{4}{e}<2\varphi(x)_{\min}<2$，而 $\varphi(0)=1$，$\varphi(1)=\frac{3-t}{e}$，当 $0<t<1$ 时，$\frac{2}{e}<\frac{3-t}{e}<\frac{3}{e}<\frac{4}{e}$，所以 $\varphi(x)_{\max}$ 就是 1 与 $\frac{3-t}{e}$ 中的最大的，故不等式 $2\varphi(x)_{\min}<\varphi(x)_{\max}$ 是无解的，综上，实数 t 的取值范围为 $(-\infty,3-2e)\cup(3-\frac{e}{2},+\infty)$.

13. $\frac{5}{4}$ 【解析】由题意知圆心 $(-1,1)$ 到抛物线的准线方程 $y=\frac{9}{4}$ 的距离为 $\frac{5}{4}$.

14. 40 【解析】因为 $[(x+4)-2]^5=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+a_3(x+4)^3+a_4(x+4)^4+a_5(x+4)^5$，所以 $a_3=C_5^3(-2)^2=40$.

15. $[\frac{1}{7},\frac{9}{11}]$ 【解析】由题意知 $\frac{1}{z}=\frac{x+y-18}{x-12}=\frac{y-6}{x-12}+1$，令 $u=\frac{y-6}{x-12}$，则 u 表示 $(12,6)$ 与 (x,y) 连线的斜率，作出可行域如图，联立 $\begin{cases}2x-y-2=0\\x+2y-11=0\end{cases}$ 得 $A(3,4)$，由图象可知在 A 点时，u 取得最小值，$u_{\min}=\frac{4-6}{3-12}=\frac{2}{9}$，在 $C(11,0)$ 点时，$u_{\max}=\frac{0-6}{11-12}=6$，由题意知 $\frac{11}{9}\leqslant\frac{1}{z}\leqslant7$，所以 $\frac{1}{7}\leqslant z\leqslant\frac{9}{11}$.



16. ②③ 【解析】因为 $f(0)=f(1)=0$，所以 $f(x)$ 不可能单调，故①错误；令 $f(x)=0$，得 $x=k,k\in\mathbf{Z}$，由 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 知②正确；因为 $f(1-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，故③正确；因为 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi^{x}+\pi^{1-x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi^{x}\cdot\pi^{1-x}}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时取得等号，所以 $f(x)_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$，取 $x=-\frac{1}{2}$，有 $f(-\frac{1}{2})=\frac{-1}{\pi^{-\frac{1}{2}}+\pi^{\frac{3}{2}}}<\frac{-1}{1+4^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{9}$，当 $x>10$ 时，$f(x)>-\frac{1}{\pi^{10}}>-\frac{1}{9}>f(-\frac{1}{2})$，当 $x<-9$ 时，$f(x)>-\frac{1}{\pi^{10}}>-\frac{1}{9}>f(-\frac{1}{2})$，而 $f(x)$ 在 $[-9,10]$ 上存在最小值 m，且 $m\leqslant f(-\frac{1}{2})$，故④错误.

17.【解析】(Ⅰ)因为 $a_{n+1}=\lambda S_n+1$，$a_n=\lambda S_{n-1}+1$，
所以 $a_{n+1}-a_n=\lambda a_n(n\geqslant2)$，即 $a_{n+1}=(\lambda+1)a_n$，
又 $a_1=1$，$a_2=\lambda+1$，所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，公比为 $\lambda+1$ 的等比数列，
所以 $a_3=(\lambda+1)^2$，
由 a_1+3,a_2+4,a_3+4 为等差数列得 $2(\lambda+1+4)=1+3+(\lambda+1)^2+4$，
整理得 $\lambda^2-1=0$，得 $\lambda=1$，$\lambda\neq-1$，
所以 $a_n=2^{n-1}$，$b_n=4+2(n-1)=2n+2$. …………………………………………………… 6 分
(Ⅱ) $a_nb_n=(2n+2)\cdot2^{n-1}=(n+1)\cdot2^n$，
所以 $T_n=2\cdot2^1+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n$，
$2T_n=2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^n+(n+1)\cdot2^{n+1}$，
$-T_n=2\cdot2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}$，…………………… 10 分
整理得 $T_n=n\cdot2^{n+1}$. ………………………………………………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)被 A 大学录取人数多于被 B 大学录取的人数分为三种情况：A 大学录取两人，B 大学录取一人；A 大学录取两人，B 大学录取零人；A 大学录取一人，B 大学录取零人；
其概率分别为 $P_1=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{72}{400}$，
$P_2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{9}{400}$，
$P_3=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{400}$，

所以被 A 大学录取的人数多于被 B 大学录取的人数的概率为：

$P=P_1+P_2+P_3=\frac{72}{400}+\frac{9}{400}+\frac{6}{400}=\frac{87}{400}$. …………………………………………………… 6 分

（Ⅱ）由题意知 X 可取 0，1，2，3，4，

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{400}$，

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{200}$，

$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+C_2^1\times C_2^1\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{73}{400}$，

$P(X=3)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+C_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{50}$，

$P(X=4)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{9}{25}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{400}$	$\frac{7}{200}$	$\frac{73}{400}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{9}{25}$

…… 10 分

所以 $EX=\frac{1}{400}\times0+\frac{7}{200}\times1+\frac{73}{400}\times2+\frac{21}{50}\times3+\frac{9}{25}\times4=\frac{31}{10}$. ………………………………… 12 分

19.【解析】（Ⅰ）证明：当 F 为线段 DE 的中点时，满足 BE∥平面 ACF，理由如下：

连结 BD 和 AC 交于 O，连结 OF，

因为 O 为 BD 中点，F 为 DE 中点，所以 OF∥BE，

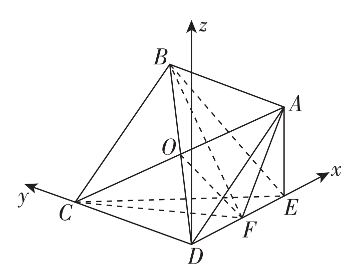
因为 $BE\not\subset$平面 ACF，$OF\subset$平面 ACF，所以 BE∥平面 ACF. ………………………………… 4 分

（Ⅱ）因为 $AE\perp$平面 CDE，$CD\subset$平面 CDE，所以 $AE\perp CD$，

因为 $CD\perp AD$，$AE\cap AD=A$，AD，$AE\subset$平面 DAE，

所以 $CD\perp$平面 DAE，因为 $DE\subset$平面 DAE，所以 $CD\perp DE$，

以 D 为原点，建立如图所示的坐标系，



则 $E(2,0,0)$，$F(1,0,0)$，$A(2,0,2)$，$D(0,0,0)$，

因为 $AE\perp$平面 CDE，$DE\subset$平面 CDE，所以 $AE\perp DE$，

因为 $AE=DE=2$，所以 $AD=2\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}$，$C(0,\sqrt{2},0)$，

由 $ABCD$ 为矩形可得：$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=(2,\sqrt{2},2)$，所以 $B(2,\sqrt{2},2)$，

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{2},-2)$，$\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BE}=0\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}y_1-2z_1=0\\x_1=0\end{cases}$，令 $y_1=\sqrt{2}$，则 $z_1=-1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,\sqrt{2},-1)$，

设平面 BCF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{CF}=(1,-\sqrt{2},0)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_2-2z_2=0\\x_2-\sqrt{2}y_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $x_2=\sqrt{2}$，$z_2=-\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{2},1,-\sqrt{2})$，

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$，

所以二面角 $C-BF-E$ 的余弦值为$-\frac{2\sqrt{30}}{15}$. …………………………………………………… 12 分

20.【解析】（Ⅰ）因为 $F(1,0)$ 为椭圆的右焦点，所以 $a^2=b^2+1$……①，

设椭圆的右顶点和上顶点分别为 M，N，

则 MN 的直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即 $bx+ay-ab=0$,

所以 $d^2=\frac{(ab)^2}{a^2+b^2}=\frac{2}{3}$,化简得 $2(a^2+b^2)=3a^2b^2$……②,

由①②得:$a^2=2,b^2=1$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)当直线 l 的斜率存在时,设 $l:y=kx+m,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}x^2+2y^2=2\\y=kx+m\end{cases}$得,$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

由 $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=0$,得 $m^2=1+2k^2$,

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\y=kx+m\end{cases}$,得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$,

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\frac{8km}{3+4k^2})^2-4(\frac{4m^2-12}{3+4k^2})}=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{3+4k^2-m^2}$,

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\times\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\sqrt{3+4k^2-m^2}=\frac{2\sqrt{6}|m|\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}$,

即$(S_{\triangle OAB})^2=\frac{24(k^2+1)(2k^2+1)}{(3+4k^2)^2}$,令 $3+4k^2=t$,则 $k^2=\frac{t-3}{4}$,

$(S_{\triangle OAB})^2=\frac{24\times\frac{t+1}{4}\times\frac{t-1}{2}}{t^2}=3(1-\frac{1}{t^2}),t\geqslant 3$,

当$\frac{1}{t}=\frac{1}{3}$,即 $3+4k^2=3$ 时,$(S_{\triangle OAB})^2$ 取得最小值$\frac{8}{3}$,

所以当且仅当 $m^2=1,k^2=0,S_{\triangle OAB}$取得最小值$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=\sqrt{2}$,此时 $A(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}),B(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})$,

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}>\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

综上所述,当 $k=0$ 时,$S_{\triangle OAB}$最小,最小值为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)$F(x)=(x-a)\ln x-x+a(x>0)$,

当 $a=0$ 时,$F(x)=x\ln x-x,F'(x)=\ln x$,

令 $F'(x)>0$,得 $x>1$;$F'(x)<0$,得 $x<1$,

所以 $F(x)$的单调递减区间为$(0,1)$,单调递增区间为$(1,+\infty)$. ……………………………………… 4 分

(Ⅱ)令 $H(x)=x^2-k\ln x-1$,则 $H'(x)=\frac{2x^2-k}{x}$,

因为 $x>1$,所以 $2x^2>0$,当 $k\leqslant 0$ 时,$H'(x)>0$,所以 $H(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数,$H(x)>H(1)=0$,满足题意;

当 $k>0$ 时,令 $H'(x)=0$,解得 $x_1=\sqrt{\frac{k}{2}}>0,x_2=-\sqrt{\frac{k}{2}}<0$,

(ⅰ)当$\sqrt{\frac{k}{2}}>1$,即 $k>2$ 时,所以 $H(x)$在$(1,x_1)$上是减函数,当 $x\in(1,x_1)$时,$H(x)<H(1)=0$,不满足题意,舍去;

(ⅱ)当$\sqrt{\frac{k}{2}}\leqslant 1$,即 $0<k\leqslant 2$ 时,所以 $H(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数,$H(x)>H(1)=0$,满足题意;

综上可得，$k\leqslant 2$. ………………………………………………………………………………………… 8分

(Ⅲ)由 $1+a>1$，得 $a>0$，$F(x)=(x-a)\ln x-x+a$，$F'(x)=\ln x-\frac{a}{x}=\frac{x\ln x-a}{x}$，

设 $G(x)=x\ln x-a$，则 $G'(x)=\ln x+1$，

令 $G'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$G'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 $G(x)$ 在 $(1,1+a)$ 上单调递增，

而 $G(1)=-a<0$，$G(1+a)=(1+a)\ln(1+a)-a$，

设 $s(a)=(1+a)\ln(1+a)-a$，则 $s'(a)=\ln(1+a)>0$，

所以 $s(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$s(a)>s(0)=0$，所以 $G(1+a)>0$，

故 $G(x)$ 在 $(1,1+a)$ 上存在唯一零点 x_0，

当 $1<x<x_0$ 时，$F'(x)<0$，当 $x_0<x<1+a$ 时，$F'(x)>0$，

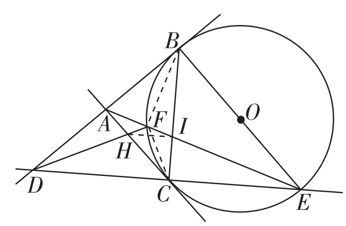
所以 $F(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1+a)$ 上单调递增，$F(x)<\max\{F(1),F(1+a)\}$，

而 $F(1+a)-F(1)=\ln(1+a)-1-(a-1)=\ln(1+a)-a$，

令 $t(a)=\ln(1+a)-a$，则 $t'(a)=\frac{1}{a+1}-1<0$，所以 $t(a)<t(0)=0$，即 $F(1+a)<F(1)$，

所以 $F(x)<a-1$. ………………………………………………………………………………………… 12分

22.【解析】证明：(Ⅰ)连接 CF，由已知，在 $\triangle BCD$ 中，$DA=AB=AC$，



所以 $\angle BCD=\angle BCE=90°$，

所以 BE 是 $\odot O$ 的直径，

因为 $\angle CBE+\angle DBC=90°$，$\angle BDC+\angle DBC=90°$，

所以 $\angle CBE=\angle BDC$，

因为 $\angle CBE=\angle CFE$，所以 $\angle BDC=\angle CFE$，

所以 A、D、C、F 四点共圆，

所以 $AH\cdot HC=DH\cdot HF$. ………………………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)连接 HI，BF，由(Ⅰ)知 A、D、C、F 四点共圆，

得 $\angle ADF=\angle ACF=\angle FBC$，

因为 AC 是 $\odot O$ 的切线，所以 $\angle ACF=\angle CEF$，

因为 $HI\parallel DE$，所以 $\angle CEF=\angle HIF=\angle HCF$，

所以 H、C、I、F 四点共圆，

所以 $\angle HDC=\angle FHI=\angle FCI=\angle ABF$，

所以 $\angle ADC=\angle DBC=\angle CBE$，

又 $BC\perp DE$，$\triangle BED$ 为等腰直角三角形. ……………………………………………… 10分

23.【解析】(Ⅰ)当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，C_1 的普通方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，C_2 的普通方程为 $x^2+y^2=1$，

联立方程组 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\x^2+y^2=1\end{cases}$，解得 C_1 与 C_2 的交点为 $(1,0)$，$(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………………… 4分

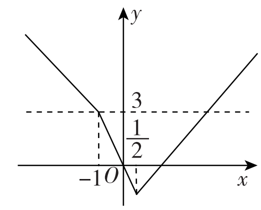
(Ⅱ)C_1 的普通方程为 $x\sin\alpha-y\cos\alpha-\sin\alpha=0$，$A$ 点坐标为 $(\sin^2\alpha,-\cos\alpha\sin\alpha)$，

故当 α 变化时，P 点轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\sin^2\alpha\\y=-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，

即 $\begin{cases}x=\frac{1-\cos 2\alpha}{4}\\y=-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\end{cases}$，由 $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，得 P 点轨迹的普通方程为 $(x-\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{1}{16}$，

故 P 点轨迹是圆心为 $(\frac{1}{4},0)$，半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆. …………………………………………………… 10分

24.【解析】(Ⅰ)$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\geqslant\frac{1}{2}\\ -3x & -1\leqslant x<\frac{1}{2}\\ -x+2 & x<-1\end{cases}$,其图象如图所示.



令 $f(x)=0$ 解得 $x_1=0,x_2=2$,所以 $f(x)<0$ 的解集为$\{x|0<x<2\}$. ……… 5 分

(Ⅱ)如图,当 $x<-1$ 时,$f(x)>3$,要使 $f(x)>f(a)$,需且只需 $f(a)\leqslant3$,

而 $f(a)=3$ 时,有$-3a=3$ 或 $a-2=3$,即 $a=-1$ 或 $a=5$,

由图象得$-1\leqslant a\leqslant5$. …………………………………………………………………………… 10 分

(五)

1.D 【解析】因为 $z=\frac{2+4i}{1-i}=\frac{(2+4i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$,所以 $\bar{z}=-1-3i$,故选 D.

2.B 【解析】由 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{3}{5}$得:$-\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{5}<0$,又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,所以 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,

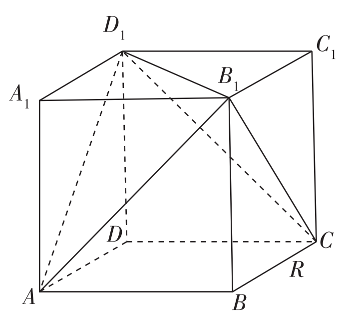
所以,$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$,所以,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$,所以答案为 B.

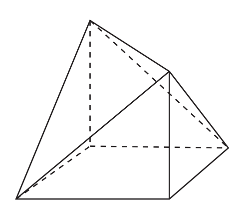
3.B 【解析】由题意$(\neg p)$:$\forall x\in\{x|\sqrt{2x-1}\leqslant1\}$,$(x-a)(x-a-1)\leqslant0$ 为真.

$\because\sqrt{2x-1}\leqslant1\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$,又$\because(x-a)(x-a-1)\leqslant0\Rightarrow a\leqslant x\leqslant a+1$,$\therefore\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2}\\ a+1\geqslant1\end{cases}$,$\therefore0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,故选 B.

4.B 【解析】在调查时,“《爸爸去哪儿》”安排的顺序有 A_2^1 种可能情况,其余 4 个节目的顺序有 A_4^4 种,故不同调查顺序的总数为 $A_2^1A_4^4=48$.

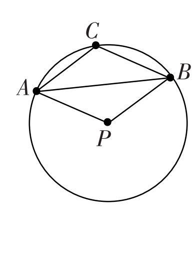
5.C 【解析】根据三视图可知,几何体是一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去两个三棱锥“$A_1-AB_1D_1$ 和 $C_1-CB_1D_1$得到的,如图,当容器中水的体积最小时,也是该几何体体积最大”时,也就是该几何体内接于球时,所以把该几何体补成正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,则正方体内接于球,所以$\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$,$\therefore x=2$.





6.D 【解析】根据对称性,四边形 AF_1BF_2 为平行四边形,又$|AB|=|F_1F_2|$,所以 AF_1BF_2 为矩形,所以 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$,不妨设点 A 在第一象限,则$\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=2a\\ \frac{|AF_2|}{|AF_1|}=\frac{1}{2}\end{cases}$,解得$\begin{cases}|AF_1|=4a\\ |AF_2|=2a\end{cases}$,$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$. $16a^2+4a^2=4c^2$,所以 $5a^2=c^2$,$\frac{b}{a}=2$,所以渐近线方程为 $y=\pm2x$,故选 D.

7.B 【解析】$\because\angle C=120°$,$\therefore\angle APB=120°$,由图可知 $\lambda<0$,$\lambda\overrightarrow{PC}=-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$,
设外接圆的半径为 R,圆心为 P,两边平方可得 $\lambda^2R^2=R^2+R^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\Rightarrow\lambda^2=1+1+2\cos120°$,可得 $\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1\Rightarrow\lambda=-1$.



8.D 【解析】由于$-2016>0$ 不成立,由框图可知对 x 反复进行加 2 运算,可以得到 $x=2$,进而可得 $y=1$,由于 $1>2015$ 不成立,所以进行 $y=2y$ 循环,最终可得输出结果为 2048.

9. B 【解析】由题意：$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$A=\sqrt{3}$，$\omega=\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)=-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}x$，将 $f(x)$ 向右平移 m 个单位得到 $g(x)=-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{m\pi}{2})$，$\because \frac{\pi}{2}\times\frac{4}{3}-\frac{m\pi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore m=-2k+\frac{1}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 所以 $m(m>0)$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

10. D 【解析】$\because \int_0^3(2x-1)dx=(x^2-x)|_0^3=6$，$\therefore n=6$，所以 $(x-1)(4x^2+\frac{1}{x^2}-4)^3=(x-1)(2x-\frac{1}{x})^6$，其中 $(2x-\frac{1}{x})^6$ 展开式的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^r\cdot C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot x^{6-2r}$，令 $6-2r=-1$，得 $r=\frac{7}{2}$（舍去），令 $6-2r=0$ 得 $r=3$，$T_4=(-1)^3C_6^3\cdot 2^3=-160$，所以二项式 $(x-1)(4x^2+\frac{1}{x^2}-4)^3$ 展开式中常数项为 $(-1)\times(-160)=160$.

11. B 【解析】因为 $\boldsymbol{m}=(1,2)$，所以直线斜率为 2，其方程为 $2x-y+3=0$，所以 $N(-\frac{3}{2},0)$.

设 $M(a,b)$，由 AB 的中点为 $(2,7)$，得 AB 中垂线的方程为 $x+2y-16=0$，

由题意得 $\begin{cases}a+2b-16=0\\(a-1)^2+(b-5)^2=b^2\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-9\\b=\frac{50}{4}\end{cases}$（舍），即 $M(6,5)$.

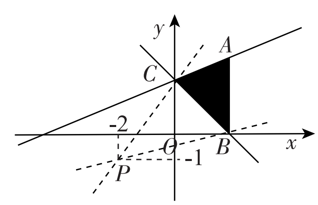
设 $P(0,t)$，

则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(6,5-t)\cdot(-\frac{3}{2},-t)=-9-t(5-t)=t^2-5t-9=(t-\frac{5}{2})^2-\frac{61}{4}\geqslant-\frac{61}{4}$.

12. A 【解析】不等式 $f(2t-1)\geqslant 2f(t)-3$，可化为 $2t^2-4t+2\geqslant a\ln t^2-a\ln(2t-1)$，即 $2t^2-a\ln t^2\geqslant 2(2t-1)-a\ln(2t-1)$，记 $g(x)=2x-a\ln x(x\geqslant 1)$，要使上式成立，只须 $g(x)=2x-a\ln x(x\geqslant 1)$ 是增函数即可. 即 $g'(x)=2-\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant 2x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，故 $a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

13. 0 【解析】由题意 $\begin{cases}x_0\leqslant 0\\2^{-x_0}-1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0>0\\\sqrt{x_0}=1\end{cases}$，解之得 $x_0=-1$ 或 $x_0=1$，所以零点之和为 0.

14. $[\frac{5}{4},\frac{5}{2}]$ 【解析】根据题意作出不等式组表示的区域是图中所示的阴影部分，



即 $\triangle ABC$ 的边界及其内部，又因为 $\frac{x+y+3}{x+2}=1+\frac{y+1}{x+2}$，所以 $\frac{y+1}{x+2}$ 表示区域内一点 (x,y) 和点 $(-2,-1)$ 连线的斜率，由图可知 $K_{PB}\leqslant\frac{y+1}{x+2}\leqslant K_{PC}$，根据不等式组解得 $B(2,0)$，$C(0,2)$，所以 $\frac{0+1}{2+2}\leqslant\frac{y+1}{x+2}\leqslant\frac{2+1}{0+2}\Rightarrow\frac{1}{4}\leqslant\frac{y+1}{x+2}\leqslant\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{5}{4}\leqslant\frac{x+y+3}{x+2}\leqslant\frac{5}{2}$.

15. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 【解析】由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\y=x\end{cases}$ 得 $(a^2+b^2)x^2-a^2b^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，又 $\overrightarrow{AF}=(c-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{BF}=(c-x_2,-y_2)$，所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=(c-x_1,-y_1)\cdot(c-x_2,-y_2)=(c-x_1)(c-x_2)+y_1y_2=c^2-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}=0$，所以 $c^2-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}=0$，

即 $2a^4+c^4-4a^2c^2=0$，$\therefore e^4-4e^2+2=0$，$\therefore e^2=2-\sqrt{2}$，$\therefore e=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

16. $2\sqrt{3}$ 【解析】设 $\angle ABC=\theta$，在三角形 ABC 中，$\frac{BC}{\sin 60^\circ}=\frac{AB}{\sin(120^\circ-\theta)}$，

因为 $BC=2$，所以 $AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(120^\circ-\theta)$，在三角形 ABP 中，$\cos\angle ABP=\cos(60^\circ+\theta)$，

所以 $AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos(60^\circ+\theta)$

$=\frac{16}{3}\sin^2(120^\circ-\theta)+4-4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(120^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$

$=\frac{16}{3}\sin^2(60°+\theta)-\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin(60°+\theta)\cos(60°+\theta)+4$

$=\frac{8}{3}[1-\cos(2\theta+120°)]-\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin(120°+2\theta)+4$

$=-\frac{8}{3}[\sqrt{3}\sin(120°+2\theta)+\cos(2\theta+120°)]+\frac{20}{3}$

$=\frac{20}{3}-\frac{16}{3}\sin(150°+2\theta)$

$=\frac{20}{3}+\frac{16}{3}\sin(2\theta-30°)(0°<\theta<120°)$，

当且仅当 $\theta=60°$时，AP 取得最大值 $2\sqrt{3}$.

17.【解析】(Ⅰ)$\because 8a_2-a_8=0$，$\therefore q^6=\frac{a_8}{a_2}=8$，$\because q>0$，$\therefore q=\sqrt{2}$，$\therefore a_n=(\sqrt{2})^n$， …………………………… 2 分

所以 $S_n=\frac{\sqrt{2}[1-(\sqrt{2})^n]}{1-\sqrt{2}}$，……………………………………………………………………… 3 分

所以 $T_n=\frac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}=\frac{17\times\frac{\sqrt{2}[1-(\sqrt{2})^n]}{1-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}[1-(\sqrt{2})^{2n}]}{1-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^{n+1}}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}[(\sqrt{2})^n+\frac{16}{(\sqrt{2})^n}-17]$，………… 5 分

因为$(\sqrt{2})^n+\frac{16}{(\sqrt{2})^n}\geqslant 8$，当且仅当$(\sqrt{2})^n=\frac{16}{(\sqrt{2})^n}$，即 $n=4$ 时，T_n 最大，最大值为 $9(\sqrt{2}+1)$. ………… 6 分

(Ⅱ)$b_n=\log_2 a_1^2+\log_2 a_2^2+\log_2 a_3^2+\cdots+\log_2 a_n^2=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，………………………… 8 分

故$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，…………………………………………………………………… 10 分

所以$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=2[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$，

所以数列$\{\frac{1}{b_n}\}$的前 n 项和为$\frac{2n}{n+1}$. ……………………………………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)在梯形 $ABCD$ 中，$\because AB/\!/CD$，$AD=DC=CB=1$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，

所以梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，$\therefore AB=2CD=2$，……………………………………………………… 2 分

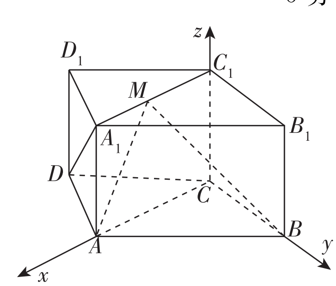
$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\frac{\pi}{3}=3$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，$\therefore BC\perp AC$，………………………………………………………………… 4 分

又 $AA_1\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore AA_1\perp BC$，

所以 $BC\perp$平面 A_1ACC_1. ……………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可建立分别以 CA，CB，CC_1 为 x 轴，y 轴，z 轴的空间直角坐标系，



设 $C_1M=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3})$，

则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$M(\lambda,0,1)$. ……………………… 6 分

$\therefore\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{BM}=(\lambda,-1,1)$，设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$为平面的一个法向量，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ \lambda x-y+z=0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\sqrt{3}-\lambda)$，……… 8 分

$\because\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$是平面 B_1BCC_1 的一个法向量，

$\therefore\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{1\times\sqrt{1+3+(\sqrt{3}-\lambda)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}-\lambda)^2+4}}$，………………………………………… 10 分

$\because 0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3}$，$\therefore$当 $\lambda=0$ 时，$\cos\theta$ 有最小值$\frac{\sqrt{7}}{7}$，当 $\lambda=\sqrt{3}$时，$\cos\theta$ 有最大值$\frac{1}{2}$，

$\therefore \cos\theta \in [\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{1}{2}]$. …………………………………………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(Ⅰ)设走甲线路最多遇到一次堵车的事件为 A，

则 $P(A)=C_4^0\times(\frac{1}{2})^4+C_4^1(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$. …………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)计算两种线路堵车时间的期望值，设选择乙线路的堵车时间为 ξ，

所以 $\xi=0,1,2,3,4$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

$P(\xi=0)=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{4})(1-\frac{3}{5})=\frac{1}{20}$；

$P(\xi=1)=(1-\frac{1}{2})\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{5})+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{3}{4})\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$；

$P(\xi=2)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{3}{4})\times(1-\frac{3}{5})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{40}$；

$P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{5})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{3}{4})\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$；

$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{40}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{40}+2\times\frac{11}{40}+3\times\frac{9}{40}+4\times\frac{9}{40}=\frac{47}{20}$；…………………………………………… 10 分

甲线路：$X\sim B(4,\frac{1}{2})$. ……………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$，因为 $\frac{47}{20}>2$，所以选择甲线路比较好一点. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)依题意知，$y'=2x$，所以在两点 $(-1,6)$ 和 $(1,6)$ 处的切线的斜率分别为 2 和 -2，所以切线的方程为 $y=2x+4$ 和 $y=-2x+4$，

所以 $A_1(-2,0)$、$A_2(2,0)$，故直线 A_1N_1 的方程为 $y=\frac{m}{2}(x+2)$，① ……………………………………… 2 分

直线 A_2N_2 的方程为 $y=-\frac{n}{2}(x-2)$，②

设直线 A_1N_1 与 A_2N_2 交点为 $E(x,y)$，

由①②相乘可得 $y^2=-\frac{mn}{4}(x^2-4)$，由 $mn=3$，整理可得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 4 分

点 N_1，N_2 不与原点重合，

点 A_1，A_2 不在轨迹 E 上，故轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$. ……………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，直线 CD 的方程为 $y=x-t$，

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，消去 y 得，$7x^2-8tx+4t^2-12=0$，

由 $\Delta>0$，得 $t^2<7$，且 $x_1+x_2=\frac{8t}{7}$，$x_1x_2=\frac{4t^2-12}{7}$，

$y_1y_2=(x_1-t)(x_2-t)=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2=\frac{3t^2-12}{7}$，…………………………………………………… 7 分

设 $N(x,y)$，由 $\overrightarrow{ON}=\cos\theta\cdot\overrightarrow{OC}+\sin\theta\cdot\overrightarrow{OD}$，

可得 $\begin{cases}x=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\ y=y_1\cos\theta+y_2\sin\theta\end{cases}$，因为点 $N(x,y)$ 在椭圆上，所以

$12=3x^2+4y^2=3(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)^2+4(y_1\cos\theta+y_2\sin\theta)^2$

$=(3x_1^2+4y_1^2)\cos^2\theta+(3x_2^2+4y_2^2)\sin^2\theta+6x_1x_2\cos\theta\sin\theta+8y_1y_2\cos\theta\sin\theta$

$=12(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2\cos\theta\sin\theta(3x_1x_2+4y_1y_2)$

$=12+2\cos\theta\sin\theta(3x_1x_2+4y_1y_2)$， …………………………………………………………… 10 分

又因为 $\theta\in[0,2\pi]$ 的任意性，所以 $3x_1x_2+4y_1y_2=0$，

从而 $3\times\dfrac{4t^2-12}{7}+4\times\dfrac{3t^2-12}{7}=0$，$\therefore t^2=\dfrac{7}{2}$，

又 $\because t>0$，$\therefore t=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，代入 $t^2<7$ 检验，满足条件，

故 t 的值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. …………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $f'(x)=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$， ………………………………………………………… 1 分

设 $h(x)=x-1-\ln x$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$，$h(x)$ 是增函数，$h(x)>h(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数；

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}<0$，$h(x)$ 是减函数，$h(x)>h(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数.

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$. …………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)要证 $\dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\dfrac{n}{m}$，即证 $\dfrac{\ln n}{m}-\dfrac{\ln m}{n}>\ln n-\ln m$，即证 $\dfrac{(n-1)\ln m}{n}>\dfrac{(m-1)\ln n}{m}$， ………………… 5 分

即证 $\dfrac{m\ln m}{m-1}>\dfrac{n\ln n}{n-1}$，即证 $f(m)>f(n)$，又 $m>n>1$，由(Ⅰ)知，$f(m)>f(n)$，所以 $\dfrac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\dfrac{n}{m}$. …………… 7 分

(Ⅲ)根据题意，$\dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{x}<\dfrac{1}{2}ax+a$，所以 $(x+1)\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}ax^2-ax<0$，

设 $G(x)=(x+1)\ln(x+1)-\dfrac{1}{2}ax^2-ax$，$\therefore G'(x)=\ln(x+1)+1-a(x+1)$， ………………… 8 分

(ⅰ)当 $a\leqslant 0$ 时，$G'(x)=\ln(x+1)+1-a(x+1)>0$，

$\therefore G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore G(x)>G(0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，与题意矛盾. …………………………………………………… 9 分

(ⅱ)当 $a>0$ 时，令 $\varphi(x)=G'(x)$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$，由于 $\dfrac{1}{x+1}\in(0,1)$，

①当 $a\geqslant 1$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a<0$，因为 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.，所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=1-a\leqslant 0$，

即 $G'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，所以 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $G(x)<G(0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，符合题意. ………………………………………………… 10 分

②当 $0<a<1$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a=\dfrac{-a[x-(\frac{1}{a}-1)]}{x+1}$，$x\in(0,+\infty)$，

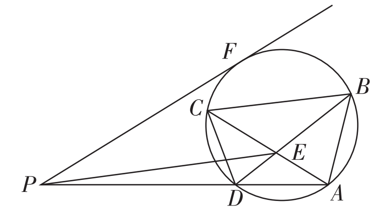
$\varphi(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}-1)$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$ 上单调递减，因为 $\varphi(0)=1-a>0$，

所以 $\varphi(x)>0$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}-1)$ 成立，即 $G'(x)>0$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}-1)$ 上成立，所以 $G(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}-1)$ 上单调递增，

所以 $G(x)>G(0)=0$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}-1)$ 上成立，与题意矛盾.

所以 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. …………………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)如图,因为$\angle DAE=\angle CBE$,$\angle ADE=\angle BCE$,



所以$\triangle AED\backsim\triangle BEC$,所以$\frac{AD}{BC}=\frac{DE}{CE}$, …………………………………… 2分

同理可证:$\triangle DEC\backsim\triangle AEB$,所以$\frac{DC}{AB}=\frac{DE}{AE}$,

而$AE=CE$,所以$\frac{AD}{BC}=\frac{DC}{AB}$. …………………………………………… 5分

(Ⅱ)因为$BC\parallel PE$,所以$\angle CBD=\angle PED$,且$\angle CBD=\angle CAD\Rightarrow\angle PED=\angle CAD$,

$\therefore\triangle EPD\backsim\triangle APE\Rightarrow\frac{PE}{PA}=\frac{PD}{PE}\Rightarrow PE^2=PA\cdot PD$. …………………………………………………… 8分

根据切线定理,得$PF^2=PA\cdot PD$,所以$PE=PF$. …………………………………………………… 10分

23.【解析】(Ⅰ)因为$\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\cos\theta=x$,所以曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2=8x-8$,

所以$(x-4)^2+y^2=8$. ………………………………………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)由$\begin{cases}x=2-t\\y=mt\end{cases}$,代入$(x-4)^2+y^2=8$,得$(-t-2)^2+(mt)^2=8$,得$(m^2+1)t^2+4t-4=0$,

$\therefore t_1+t_2=-\frac{4}{m^2+1}$,$t_1t_2=\frac{-4}{m^2+1}$, ………………………………………………………………………… 8分

所以$|AB|=\sqrt{(-t_1+t_2)^2+(mt_1-mt_2)^2}=\sqrt{1+m^2}\,|t_1-t_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$,

代入可得$|AB|=4\sqrt{\frac{1}{m^2+1}+1}$,又$m^2+1\geqslant1$,所以$|AB|\in(4,4\sqrt{2}]$. ………………………………… 10分

24.【解析】(Ⅰ)当$x<-2$时,$f(x)-|x+2|=1-2x+x+2=-x+3$,

$f(x)-|x+2|>x-1$,即$-x+3>x-1$,解得$x<2$,又$x<-2$,$\therefore x<-2$; ………………………………… 2分

当$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)-|x+2|=1-2x-x-2=-3x-1$,

$f(x)-|x+2|>x-1$,即$-3x-1>x-1$,

解得$x<0$,又$-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,$\therefore-2\leqslant x<0$; ………………………………………………………… 4分

当$x>\frac{1}{2}$时,$f(x)-|x+2|=2x-1-x-2=x-3$,

$f(x)-|x+2|>x-1$,即$x-3>x-1$,不等式无解.

综上,不等式$f(x)-|x+2|>x-1$的解集为$(-\infty,0)$. ……………………………………………… 5分

(Ⅱ)当$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$时,$f(x)+|2x+a|=|2x-1|+|2x+a|=1+a$,

不等式$f(x)+|2x+a|\leqslant x+3$化为$1+a\leqslant x+3$, ……………………………………………………… 8分

所以$x\geqslant a-2$对$x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$恒成立,故$-\frac{a}{2}\geqslant a-2$,即$a\leqslant\frac{4}{3}$,

从而a的取值范围为$(-1,\frac{4}{3}]$. ………………………………………………………………………… 10分

(六)

1. D 【解析】因为$A=\{x|x^2-2016x<0\}=(0,2016)$,$B=[-2014,2016]$,

所以$\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,0]\cup[2016,+\infty)$,$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,-2014)\cup(2016,+\infty)$,

所以$A\cap B=(0,2016)=A$,$A\cup B=[-2014,2016]=B$,$\complement_{\mathbf{R}}A\supset\complement_{\mathbf{R}}B$,

$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=(-\infty,0]\cup[2016,+\infty)\cup[-2014,2016]=\mathbf{R}$,选D.

2. A 【解析】因为$z=\frac{i}{3+4i}=\frac{i(3-4i)}{25}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$,复数$z$在复平面内对应的点为$(\frac{4}{25},\frac{3}{25})$在第一象限内,所以命题$p$是真命题;因为当$x=3$时,$2^3<3^2$,所以命题$q$是假命题;根据真值表得,$p\wedge(\neg q)$是真命题.

3. A 【解析】因为$P(80<X\leqslant120)=0.6826$,所以$P(X>120)=\frac{1-P(80<X\leqslant120)}{2}=\frac{1-0.6826}{2}=0.1587$,所

以速度超过 120 km/h 的车辆数的估计值为 1587.

4. D 【解析】$\because 2S_n=4a_n-1, 2S_{n-1}=4a_{n-1}-1, \therefore 2a_n=4a_n-4a_{n-1}, \therefore a_n=2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，

又 $2a_1=4a_1-1, \therefore a_1=\frac{1}{2}$，所以数列$\{a_n\}$为 $a_1=\frac{1}{2}, q=2$ 的等比数列，

所以 $a_n=2^{n-2}, T_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=2^{-1+0+1+\cdots+(n-3)+(n-2)}=2^{\frac{n(n-3)}{2}}$.

5. C 【解析】$\because f(\frac{1}{2})=3\times(t-1)^{\frac{1}{2}}=6$，即$(t-1)^{\frac{1}{2}}=2$，解得 $t=5$.

故 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+5), x<0\\ 3\times 4^x, \quad x\geqslant 0\end{cases}$.

当 $x<0$ 时，$\log_2(x^2+5)>3, \therefore x^2+5>8, \therefore x^2>3, \therefore x>\sqrt{3}$ 或 $x<-\sqrt{3}$，所以 $x<-\sqrt{3}$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$3\times 4^x>3, \therefore 4^x>1, \therefore x>0$，所以 $x>0$. 故不等式 $f(x)>3$ 的解集为$\{x|x>0$ 或 $x<-\sqrt{3}\}$.

6. A 【解析】所求体积是球去掉 2 个$\frac{1}{8}$球余下部分的体积，即体积为$\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}\times 2=\pi$.

7. D 【解析】因为 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\tan(\alpha+\beta-\beta+\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{-\frac{11}{7}-\frac{1}{4}}{1-\frac{11}{7}\times\frac{1}{4}}=-3$，

所以 $\tan\alpha=2$，所以 $\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}$，

又 $\sin^2 2\alpha+2\cos^2 2\alpha=\dfrac{\sin^2 2\alpha+2\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}=\dfrac{\tan^2 2\alpha+2}{\tan^2 2\alpha+1}=\dfrac{34}{25}$.

8. C 【解析】因为$\dfrac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}=\sqrt{i+1}-\sqrt{i}$，所以 $S=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})=\sqrt{i+1}-1$，

即 $\sqrt{i+1}-1=10$，解得 $i=120$. 故判断框内的 $n=121$.

9. B 【解析】根据题意直线 $l: ax-\sqrt{2}y=-6$ 经过圆$(x+6)^2+y^2=1$ 的圆心，所以 $a=1$，又点 P 到抛物线的准线的距离等于点 P 到焦点 $F(2,0)$的距离，所以点 P 到直线 l 的距离与到抛物线的准线的距离之和为 $d+|PF|$，所以 $d+|PF|$的最小值为焦点 $F(2,0)$到直线 l 的距离，$\therefore (d+|PF|)_{\min}\geqslant\dfrac{8}{\sqrt{1+2}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

10. B 【解析】作点 O 在平面 ABC 的射影点 O'，得 $OO'=\frac{\sqrt{2}}{2}, O'C=\frac{\sqrt{6}}{2}, |OP|=\dfrac{OO'}{\sin x}$，即 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}$，当点 P 在 A 或 B 或 C 位置时，x 取得最小值$\frac{\pi}{6}$，故 C、D 项不符合题意；易知函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}$的图象符合 B 项.

11. A 【解析】因为 PF_1 所在直线与圆$(x-c)^2+y^2=c^2$ 相切，所以 $\sin\angle PF_1F_2=\dfrac{c}{|F_1F_2|}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$；由题意可知$|PF_2|=|F_1F_2|$，所以$|PF_1|=\sqrt{3}|F_1F_2|=2\sqrt{3}c$，从而$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{3}c-2c=2a$，

$\therefore \dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，故该双曲线的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

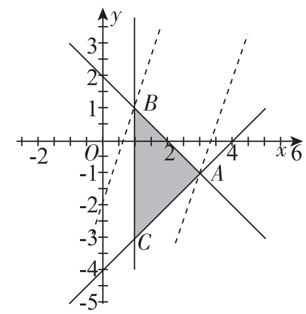
12. D 【解析】设$(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0})$为 $f(x)$图象上任意一点，则它关于原点的对称点为$(-x_0, -\frac{\ln x_0}{x_0})$，由题意可知，$-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=kx_0$，即方程 $k=\dfrac{\ln x_0}{x_0^2}$有解，令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，又 $h'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$，令 $h'(x)=0$ 解得 $x=\sqrt{e}$，当 x 在$(0,+\infty)$内变化时，$h'(x)$，$h(x)$变化如下表，

x	$(0,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘

由表知，当 $x=\sqrt{e}$ 时，函数 $h(x)$ 有最大值，且最大值为 $\frac{1}{2e}$.

13. 10 【解析】$(x^2-1)^2(x^3+\frac{1}{x})^4=(x^4-2x^2+1)(x^3+\frac{1}{x})^4$，根据通项公式，所以 x^8 的系数为 $C_4^2+C_4^1=10$.

14. $[0,2]$ 【解析】如图阴影部分为约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 2\\x-y\leqslant 4\\x\geqslant 1\end{cases}$ 的可行域，



经计算点 $A(3,-1)$，$B(1,1)$，设 $t=y-3x$，

$\therefore y=3x+t$，当 $y=3x+t$ 经过 A 点时，截距 t 取最小值，当 $y=3x+t$ 经过 B 点时，截距 t 取最大值. 所以 $t\in[-10,-2]$，所以 $z\in[0,2]$.

15. $\sqrt{13}$ 【解析】$\because x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$，$\therefore x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$，

$\therefore\overrightarrow{OC}=-x^2\overrightarrow{OA}-(x-1)\overrightarrow{OB}$，因为 A,B,C 三点共线，所以 $-x^2-(x-1)=1$，

$\therefore x=0$ 或 -1，当 $x=0$ 时，$\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$ 与题意不符，所以 $x=-1$，

$\therefore\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=(-1,0)+2(2,1)=(3,2)$，$\therefore|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{13}$.

16. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ 【解析】因为 $f(x)=\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1+\cos(\frac{2\pi}{3}-2x)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

由 $f(C)=0$，$\therefore\sin(2C+\frac{\pi}{6})=1$，又 C 为锐角，$\therefore C=\frac{\pi}{6}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得 $1=a^2+b^2-\sqrt{3}ab$，

所以 $1=a^2+b^2-\sqrt{3}ab\geqslant(2-\sqrt{3})ab$，$\therefore ab\leqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. 所以，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

17.【解析】(Ⅰ)证明：由题意 $f(x)+f(2-x)=4$ 恒成立，所以 $\frac{mx-1}{x-1}+\frac{m(2-x)-1}{1-x}=4$，

整理得 $2m=4$，$\therefore m=2$，$\therefore f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$， …………………………………………………… 2 分

所以 $a_{n+1}=\frac{1}{f(1+a_n)}=\frac{1}{\frac{2(1+a_n)-1}{1+a_n-1}}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$，

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是公差为 2 的等差数列. …………………………………………… 6 分

(Ⅱ)$\because\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_3}+(n-3)d=5+2(n-3)=2n-1$，$\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$， …………………………………… 8 分

所以数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 n 项和，

$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$. ………………………………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)由 $PD=4$，$DB=3$，$PB=5$ 可得 $PD^2+DB^2=PB^2$，$\therefore PD\perp DB$，同理可得：$PD\perp DC$，

而 $DB\cap DC=D$，$DB,DC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD\perp$ 平面 $ABCD$，而 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

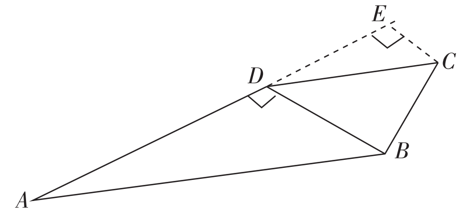
$\therefore AD\perp PD$，………………………………………………………………………………………………… 3 分

又 $AD\perp DB$，且 $PD\cap BD=D$，$PD,BD\subset$ 平面 PBD，$\therefore AD\perp$ 平面 PBD，

又 $PB\subset$ 平面 PBD，$\therefore AD\perp PB$. ………………………………………………………………………… 6 分

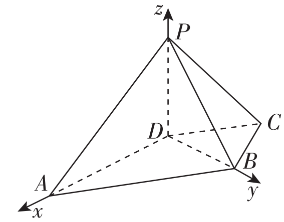
(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，PD,AD,BD 两两垂直，以 D 为原点，以 DA,DB,DP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建

立空间直角坐标系，如图所示：过 C 作 $CE\perp AD$，结合 $\tan\angle BDC=\frac{3}{4}$可得，$\tan\angle DCE=\frac{3}{4}$，所以 $DE=\frac{9}{5}$，$CE=\frac{12}{5}$，



故各点坐标为 $A(6,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(-\frac{9}{5},\frac{12}{5},0)$，$P(0,0,4)$，$D(0,0,0)$，

所以，$\overrightarrow{PA}=(6,0,-4)$，$\overrightarrow{DC}=(-\frac{9}{5},\frac{12}{5},0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{AB}=(-6,3,0)$，………………………… 8 分



设平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由条件可得$\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}4z_1=0\\-\frac{9}{5}x_1+\frac{12}{5}y_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=3$，则 $x_1=4$，$z_1=0$，即 $\boldsymbol{n}=(4,3,0)$，

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，由条件可得$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=0\\\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}6x_2-4z_2=0\\-6x_2+3y_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $y_2=2$，$z_2=\frac{3}{2}$，即 $\boldsymbol{m}=(1,2,\frac{3}{2})$，………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{5\times\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}}=\frac{4\sqrt{29}}{29}$，

所以平面 PCD 与平面 PAB 所成的锐二面角的余弦值为$\frac{4\sqrt{29}}{29}$. ………………………… 12 分

19.【解析】（Ⅰ）设 A 表示事件“销售量为 30 件”，B 表示事件“价格为 800 元/件”，

由题设知 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，所以 X 的所有可能的值为：

$50\times(1000-400)-10000=20000$，$30\times(1000-400)-10000=8000$，$50\times(800-400)-10000=10000$，

$30\times(800-400)-10000=2000$. ………………………… 2 分

$P(X=20000)=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.8\times0.6=0.48$，$P(X=8000)=P(A)P(\overline{B})=0.2\times0.6=0.12$，

$P(X=10000)=P(\overline{A})P(B)=0.8\times0.4=0.32$，$P(X=2000)=P(A)P(B)=0.2\times0.4=0.08$.

所以 X 的分布列为：

X	2000	8000	10000	20000
P	0.08	0.12	0.32	0.48

所以 $E(X)=2000\times0.08+8000\times0.12+10000\times0.32+20000\times0.48=13920$(元). ………………………… 6 分

（Ⅱ）设 C_i 表示事件“第 i 月利润不少于 10000 元”($i=1,2,3$)，由题意知 C_1,C_2,C_3 相互独立，

$P(C_i)=P(X=10000)+P(X=20000)=0.32+0.48=0.8$，

这 3 个月中至少有 2 个月的利润不少于 10000 元的概率为

$P=0.8^3+C_3^2\times0.8^2\times0.2\approx0.896$. ………………………… 9 分

（Ⅲ）把 $\bar{x}=5$，$\bar{y}=50$ 代入 $\hat{y}=6.5x+\hat{a}$，得 $\hat{a}=17.5$，所以 $\hat{y}=6.5x+17.5$，所以当 $x=10$ 时，$\hat{y}=82.5$. 估计店员的薪酬为 10 时的销售额为 82.5. ………………………… 12 分

20.【解析】（Ⅰ）由题意 PF_1，PF_2 分别为$\triangle AMN$，$\triangle BMN$ 的中位线，

所以$|AN|+|BN|=2(|PF_1|+|PF_2|)=4a=8$，$\therefore a=2$，………………………… 2 分

又抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点到准线的距离为 2，所以 $p=2$，

又抛物线 $y^2=4x$ 的准线经过 F_1，$\therefore c=1$，$\therefore b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4 分

（Ⅱ）（ⅰ）将椭圆 C 关于直线 $y=x$ 对称后得到的曲线 C_1 仍为椭圆，焦点为$(0,1)$，$(0,-1)$，

所以曲线 C_1 的标准方程为$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$. …………………………………………………………… 6 分

(ⅱ)设 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,$G(x_0,y_0)$,则由$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\lambda\overrightarrow{OG}$知,

$x_1+x_2=\lambda x_0$,$y_1+y_2=\lambda y_0$,且$\frac{y_0^2}{4}+\frac{x_0^2}{3}=1$,①

又直线 $l:y=k(x+t)$,$kt\neq 0$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 相切,所以有$\frac{|kt+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, ………………………… 7 分

由 $k\neq 0$,可得 $k=\frac{2t}{1-t^2}(t\neq\pm 1,t\neq 0)$,②

又联立$\begin{cases}y=k(x+t)\\4x^2+3y^2=12\end{cases}$,得$(4+3k^2)x^2+6k^2tx+3k^2t^2-12=0$,

由 $\Delta>0$ 得 $3k^2+4>k^2t^2$,且 $x_1+x_2=-\frac{6k^2t}{4+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{3k^2t^2-12}{4+3k^2}$,

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2kt=\frac{8kt}{4+3k^2}$,所以得 $G(\frac{-6k^2t}{\lambda(4+3k^2)},\frac{8kt}{\lambda(4+3k^2)})$ ………………………… 8 分

代入①式得$\frac{12k^4t^2}{\lambda^2(4+3k^2)^2}+\frac{16k^2t^2}{\lambda^2(4+3k^2)^2}=1$,所以 $\lambda^2=\frac{4k^2t^2}{4+3k^2}$,

又将②式代入得,$\lambda^2=\frac{4}{(\frac{1}{t^2})^2+\frac{1}{t^2}+1}(t\neq 0,t\neq\pm 1)$,…………………………………………………… 10 分

易知$(\frac{1}{t^2})^2+\frac{1}{t^2}+1>1$,且$(\frac{1}{t^2})^2+\frac{1}{t^2}+1\neq 3$,所以 $\lambda^2\in(0,\frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},4)$,

所以 λ 的取值范围为$\left\{\lambda\,|-2<\lambda<2,\text{且 }\lambda\neq 0,\text{且 }\lambda\neq\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)$\because f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2-1$,$\therefore f'(x)=x^2-ax$,若直线 $x+y+m=0$ 对任意的 $m\in\mathbf{R}$ 都不是曲线 $y=f(x)$的切线,则 $f'(x)=x^2-ax\neq -1$,所以 $f'(x)$的最小值大于-1, ……………………………… 2 分

$\because f'(x)=x^2-ax=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}\geqslant-\frac{a^2}{4}$,所以$-\frac{a^2}{4}>-1$,$\therefore a^2<4$,$\therefore a\in(-2,2)$. …………………… 4 分

(Ⅱ)$\because F(x)=g(x)-x=b\ln x-x(x>0)$,$\therefore F'(x)=\frac{b}{x}-1=\frac{b-x}{x}(x>0)$, ………………………… 5 分

当 $b\leqslant 0$ 时,$F'(x)<0$,函数 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,函数无极值,

当 $b>0$ 时,解 $F'(x)=0$ 得 $x=b$,

$x\in(0,b)$时,$F'(x)>0$,函数 $F(x)$在$(0,b)$上单调递增,$x\in(b,+\infty)$时,$F'(x)<0$,函数 $F(x)$在$(b,+\infty)$上单调递减,函数 $F(x)$在 $x=b$ 处有极大值,极大值为 $F(b)=b\ln b-b$,无极小值.

综上,当 $b\leqslant 0$ 时,函数无极值;当 $b>0$ 时,函数 $F(x)$有极大值 $F(b)=b\ln b-b$,无极小值. …………… 7 分

(Ⅲ)由题意得 $h(x)=x^2-ax+\ln x(x>0)$,则 $h'(x)=\frac{2x^2-ax+1}{x}(x>0)$,

$\therefore$方程 $2x^2-ax+1=0(x>0)$有两个不相等的实根 x_1,x_2,且 $x_1\in(0,\frac{1}{2})$,

又因为 $x_1x_2=\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1}{2x_1}\in(1,+\infty)$,且 $ax_1=2x_1^2+1$,$ax_2=2x_2^2+1$, ………………………… 8 分

而 $f'(x_1)+g(x_1)-f'(x_2)-g(x_2)=h(x_1)-h(x_2)$

$=x_1^2-ax_1+\ln x_1-(x_2^2-ax_2+\ln x_2)=[x_1^2-(2x_1^2+1)+\ln x_1]-[x_2^2-(2x_2^2+1)+\ln x_2]$

$=x_2^2-x_1^2+\ln\frac{x_1}{x_2}=x_2^2-(\frac{1}{2x_2})^2-\ln 2x_2^2(x_2>1)$, ……………………………………………………… 10 分

设 $\phi(x)=x^2-(\frac{1}{2x})^2-\ln 2x^2(x>1)$,则 $\phi'(x)=\frac{(2x^2-1)^2}{2x^3}>0$,

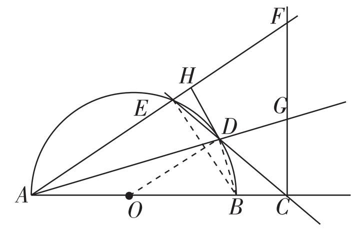
则 $\phi(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数,所以 $\phi(x_2)>\phi(1)=\frac{3}{4}-\ln 2$,

即 $f'(x_1)+g(x_1)-f'(x_2)-g(x_2)>\frac{3}{4}-\ln2$，所以 $m\leqslant\frac{3}{4}-\ln2$，

所以实数 m 的最大值为 $\frac{3}{4}-\ln2$. …………………………………………………………… 12 分

22.【解析】证明：(Ⅰ)连接 EB，因为 AB 为半圆 O 的直径，所以 $\angle AEB=90^\circ$，$\angle ADB=90^\circ$，在 $Rt\triangle AEB$ 和 $Rt\triangle ACF$ 中，$\angle ABE=\angle AFC$，又 $\angle ABE=\angle ADE$，$\therefore\angle ADE=\angle AFC$，所以 D,E,F,G 四点共圆. …… 5 分

(Ⅱ)连接 OD，因为 $OA=OD$，所以 $\angle OAD=\angle ODA$，



因为 DH 为半圆的切线，所以 $OD\perp DH$，又 $AH\perp DH$，所以 $OD/\!/AH$，

所以 $\angle ODA=\angle DAH$，$\angle OAD=\angle DAH$，所以 $BD=ED$， …………… 8 分

又因为 A,B,D,E 四点共圆，DH 为半圆的切线，

所以 $\angle DAB=\angle EAD=\angle EDH$，

又 $\angle ADB=90^\circ$，所以 $Rt\triangle ADB\backsim Rt\triangle DHE$，

所以 $\frac{EH}{ED}=\frac{BD}{AB}$，$\therefore ED\cdot BD=EH\cdot AB$，

又 $BD=ED$，所以 $BD^2=EH\cdot AB$. …………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)对于曲线 C_1：$x+y=2$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，故有 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$，……………… 2 分

对于曲线 C_2：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$，消去参数得 $x^2+y^2=4$，所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2$. ………………… 5 分

(Ⅱ)联立方程 $\begin{cases}\rho=2\\\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2\end{cases}$，得 $2\cos\theta+2\sin\theta=2$，$\therefore\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because\theta\in[0,2\pi)$，$\therefore\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，或 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$，

所以两交点的极坐标为 $(2,0)$，$(2,\frac{\pi}{2})$，…………………………………………………………………… 9 分

根据勾股定理，所以两交点间的距离为 $2\sqrt{2}$. ……………………………………………………… 10 分

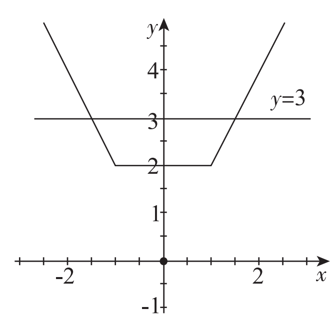
24.【解析】(Ⅰ)函数 $f(x)=|x+1|+|x-m|$ 表示数轴上的 x 对应点到 -1 和 m 对应点的距离之和，由于不等式 $f(x)\geqslant6$ 的解集为 $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$，

故有 $\begin{cases}|-2+1|+|-2-m|=6\\|4+1|+|4-m|=6\end{cases}$，即 $\begin{cases}|2+m|=5\\|4-m|=1\end{cases}$，得 $m=3$. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $\left|\frac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}\right|=\left||1+\frac{1}{a}|-|2-\frac{1}{a}|\right|\leqslant|1+\frac{1}{a}+2-\frac{1}{a}|=3$，

当且仅当 $(1+\frac{1}{a})(2-\frac{1}{a})\leqslant0$ 时，取等号， …………………………………………………… 6 分

所以 $M\geqslant3$，$f(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}2x,x\geqslant1\\2,-1<x<1\\-2x,x\leqslant-1\end{cases}$，图象如图所示，



显然，$y=M=3$ 时，直线与 $f(x)$ 图象围成的图形的面积最小.

两交点的坐标为 $(-\frac{3}{2},3)$，$(\frac{3}{2},3)$，………………………………………… 8 分

所以围成的图形为一个等腰梯形，所以面积为 $\frac{1}{2}\times(2+3)\times1=\frac{5}{2}$.

故函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=M$ 围成的图形的面积的最小值为 $\frac{5}{2}$. ……………………………………… 10 分