# 百校联盟 2016届高考复习全程精练·模拟卷

## 文科数学　　参考答案

### (一)

1. B 【解析】因为 $A=\{x|y=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x+1}}\}=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

2. C 【解析】因为 $\frac{z}{1+z}=1+\mathrm{i}$，所以 $z=(1+\mathrm{i})(1+z)=1+\mathrm{i}+(1+\mathrm{i})z$，所以 $-\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$. 所以 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1+\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$.

3. C 【解析】根据特称命题的否定为全称命题可得 $\exists x\in\mathbf{R},x+\frac{1}{x}>3$ 命题的否定是 $\forall x\in\mathbf{R},x+\frac{1}{x}\leqslant 3$.

4. D 【解析】因为 $y=\sqrt{x^2+2x}$ 为非奇非偶函数，所以 A 错误，函数 $y=e^x+e^{-x}$ 为偶函数，且值域为 $[2,+\infty)$，所以 B 错误，函数 $y=x^2\cos x$，当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$y<0$，所以 C 错误，因为函数 $x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)-[-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)]=x\ln 1=0$，所以是偶函数，因为当 $x\geqslant 0$ 时函数 $y=x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是增函数，所以 $y\geqslant 0$，即值域为 $[0,+\infty)$.

5. D 【解析】根据题意设各组的频率为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$，则 $a_1+a_6+a_2=0.3$，又因为 $a_1,a_6,a_2$ 是等差数列，所以 $a_1+a_2=0.2$，$a_6=0.1$，因为 $a_4=0.25$，所以 $a_3+a_5=0.45$，因为 $a_3=2a_5$，所以 $a_3=0.3$，$a_5=0.15$，由图可知 $a_2=a_5=0.15$. 又因为总人数为 $\frac{25}{0.25}=100$，抽样比为 $\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$，所以从第 2 组抽取 $0.15\times 100\times\frac{1}{5}=3$ 人，从第 6 组抽取 $0.1\times 100\times\frac{1}{5}=2$ 人.

6. B 【解析】因为 $2a_3+a_5+a_7=12$，所以 $a_3+a_5+a_3+a_7=12$，即 $2a_4+2a_5=12$，所以 $a_4+a_5=6$，所以 $S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(a_4+a_5)}{2}=\frac{8\times 6}{2}=24$.

7. B 【解析】由题可知 $PF_1\perp PF_2$，所以 $S_{\triangle OPF_1}=\frac{1}{2}\times|PF_1|\times\frac{1}{2}|PF_2|=ac$，即 $|PF_1|\times|PF_2|=4ac$. 由于 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，所以 $(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\times|PF_2|=4c^2$，所以 $4a^2+8ac=4c^2$，所以 $e=\sqrt{2}+1$.

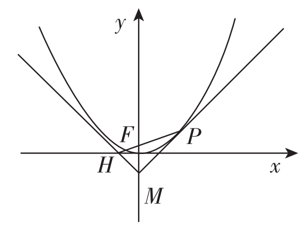
8. B 【解析】因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BP}=(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

9. C 【解析】由图象可知 $\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，所以 $\omega=1$，因为 $f(\frac{\pi}{12})=\cos(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=\frac{1}{2}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}$，令 $k=0$ 可知 C 正确.

10. B 【解析】因为 $BC=2$，$AC=1$，$\angle ACB=60^\circ$，所以 $AB^2=1+4-2\times 1\times 2\times\frac{1}{2}=3$，所以 $AB=\sqrt{3}$，所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以取 $BC$ 的中点 $F$，连接 $OF$，则 $OF\perp$ 平面 $ABC$，所以 $OF=\sqrt{3}$，所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times$

$\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=1$.

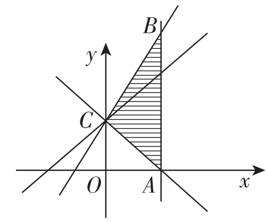
11. B 【解析】如图所示，设 $P(x_0,y_0)$，因为 $y=\frac{1}{2}x^2$，所以 $y'=x$，所以 $k=x_0$，所以切线方程为 $y-y_0=x_0(x-x_0)$，所以 $M(0,-\frac{1}{2}x_0^2)$，因为 $F(0,\frac{1}{2})$，所以 $k_{PF}=\frac{y_0-\frac{1}{2}}{x_0}=\frac{x_0^2-1}{2x_0}$，所以直线 $PF$ 的方程 $y-\frac{1}{2}=\frac{x_0^2-1}{2x_0}x$，所以 $H(-\frac{x_0}{x_0^2-1},0)$，所以




$k_{MH}=\frac{\frac{1}{2}x_0^2}{-\frac{x_0}{x_0^2-1}}=\frac{x_0^2(x_0^2-1)}{-2x_0}$，因为 $HM\perp PM$，所以 $\frac{x_0^2(x_0^2-1)}{-2x_0}x_0=-1$，解得 $x_0^2=2$，所以 $|PF|=y_0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

12. D 【解析】因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，所以 $f(-1)=f(3)$，$f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})$，因为当 $x>1$ 时，$xf'(x)>f'(x)+f(x)$，即 $(x-1)f'(x)-f(x)>0$，令 $h(x)=\frac{f(x)}{x-1}$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)f'(x)-f(x)}{(x-1)^2}>0$，所以当 $x>1$ 时，函数 $h(x)=\frac{f(x)}{x-1}$ 单调递增，所以 $\frac{f(\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}}<f(2)<\frac{f(3)}{2}$，即 $4f(\frac{3}{2})<2f(2)<f(3)$，所以 $4f(\frac{1}{2})<2f(2)<f(-1)$.

13. 2 【解析】做出不等式组 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\ x-1\leqslant 0\\ 3x-y+1\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域如图所示的三角形 $ABC$，所以直线 $y=2x+z$ 经过点 $B$ 时，$z$ 取得最大值，由于 $\begin{cases}x=1\\ 3x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$，所以 $z_{\max}=4-2=2$.




14. $\frac{11}{8}$ 【解析】根据程序框图的运行可知，因为 $S=0,n=1,i=1\Rightarrow S=\frac{1}{2}<\frac{9}{8}$，所以进入循环，$i=2,n=2\Rightarrow S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}=1<\frac{9}{8}$；$i=3,n=3\Rightarrow S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}=1+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}>\frac{9}{8}$，满足条件，退出循环，所以 $S=\frac{11}{8}$.

15. 6 【解析】根据三视图可知该几何体是由一个四棱柱和一个四棱锥组成，根据图中的数据可知 $V_1=\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2\times 1=3$，$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2\times 3=3$，所以 $V=3+3=6$.

16. $\begin{cases}1,n=1\\ 4\times 3^{n-1}-2^{n+1}-n,n\geqslant 2\end{cases}$ 【解析】因为 $S_{n+1}+3S_{n-1}=4S_n+2^{n+1}+2n-1$，所以 $S_{n+1}-S_n=3(S_n-S_{n-1})+2^{n+1}+2n-1$，即 $a_{n+1}=3a_n+2^{n+1}+2n-1$，所以 $a_{n+1}+n+1=3(a_n+n)+2^{n+1}$，即 $\frac{a_{n+1}+n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\times\frac{(a_n+n)}{2^n}+1$，令 $c_n=\frac{a_n+n}{2^n}$，所以 $c_{n+1}+2=\frac{3}{2}(c_n+2)$，所以数列 $\{c_n+2\}$ 是以 $c_2+2=\frac{a_2+2}{2^2}+2=3$ 为首项的等比数列，所以 $c_n+2=3\times(\frac{3}{2})^{n-2}$，所以 $\frac{a_n+n}{2^n}=3\times(\frac{3}{2})^{n-2}-2$，所以 $a_n=4\times 3^{n-1}-2^{n+1}-n$，因为 $a_1=4-2^2-1=-1\neq 1$，所以 $a_n=\begin{cases}1,n=1\\ 4\times 3^{n-1}-2^{n+1}-n,n\geqslant 2\end{cases}$.

17.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以 $f(x)=\cos(2x+\frac{2\pi}{3})+2\cos^2 x=\cos 2x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{2\pi}{3}+1+\cos 2x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+1=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+1$. ………………………………………………………… 3 分

因为 $x\in[-\frac{7\pi}{24},\frac{\pi}{6}]$,所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\cos(2x+\frac{\pi}{3})\leqslant 1$. ······························ 5 分

所以 $\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 2$,所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{1}{2},2]$. ······························ 6 分

(Ⅱ)由题意,$f(B+C)=\cos[2(B+C)+\frac{\pi}{3}]+1=\frac{3}{2}$,所以 $\cos(2\pi-2A+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$,

即 $\cos(2A-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$. ······························ 8 分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $2A-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$,所以 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ······························ 9 分

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc$. ······························ 10 分

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$,且 $a=2$,所以 $4\geqslant 2bc-bc=bc$. ······························ 11 分

当 $b=c=2$ 时,等号成立,所以 $S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. ······························ 12 分

18.【解析】(Ⅰ)因为底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AB\parallel CD$,$AB\perp BC$,$AB=2BC=2CD=2$,

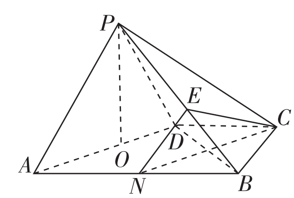
所以 $AD=BD=\sqrt{2}$,所以 $AD^2+BD^2=4=AB^2$,所以 $BD\perp AD$. ······························ 3 分

又因为 $OP\perp BD$,$OP\cap AD=O$,且 $OP,AD\subset$ 平面 $PAD$,

所以 $BD\perp$ 平面 $PAD$. ······························ 5 分

因为 $AP\subset$ 平面 $PAD$,所以 $AP\perp BD$. ······························ 6 分

(Ⅱ)点 $E$ 为 $PB$ 的中点.




证明:如图所示取 $AB$ 的中点 $N$,连接 $EN,CN$, ······························ 7 分

因为 $E$ 为 $PB$ 的中点,所以 $EN\parallel AP$,因为 $AP\subset$ 平面 $PAD$,$EN\not\subset$ 平面 $PAD$,

所以 $EN\parallel$ 平面 $PAD$. ······························ 9 分

因为 $AB=2CD$,$AB\parallel CD$,所以四边形 $ANCD$ 为平行四边形,所以 $AD\parallel CN$,

因为 $AD\subset$ 平面 $PAD$,$CN\not\subset$ 平面 $PAD$,所以 $CN\parallel$ 平面 $PAD$, ······························ 11 分

因为 $EN\subset$ 平面 $ENC$,$CN\subset$ 平面 $ENC$,且 $EN\cap NC=N$,

所以平面 $ADP\parallel$ 平面 $ENC$,

因为 $EC\subset$ 平面 $ENC$,所以 $EC\parallel$ 平面 $PAD$. ······························ 12 分

19.【解析】(Ⅰ)根据茎叶图可知甲组消防员的年龄从小到大分别为 19,24,26,31,32,35,43,

所以中位数为 31. ······························ 3 分

乙组消防员的年龄从小到大依次为 18,27,32,33,40,

所以平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{5}(18+27+32+33+40)=30$. ······························ 6 分

(Ⅱ)因为乙组的年龄分别为 18,27,32,33,40,所以从中任取 2 人的年龄有(18,27),(18,32),(18,33),(18,40),(27,32),(27,33),(27,40),(32,33),(32,40),(33,40),所以共有 10 种情况. ······························ 9 分

其中恰有一人年龄在 30 岁以下的有(18,32),(18,33),(18,40),(27,32),(27,33),(27,40)共有 6 种情况,

······························ 11 分

所以 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ······························ 12 分

20.【解析】(Ⅰ)因为方程 $2x^2-3\sqrt{2}x+2=0$ 的解为 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$x_2=\sqrt{2}$,所以椭圆的离心率为 $e_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,双曲线的离心率为 $e_2=\sqrt{2}$. ······························ 2 分

由于 $e_2^2=\frac{m^2+n^2}{m^2}=2$,所以 $\frac{n^2}{m^2}=1$,所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$. ······························ 3 分

设椭圆的一个焦点为 $F(0,c)$,因为椭圆的焦点到双曲线渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|c|}{\sqrt{1+1}}$,解得 $c=1$. …………………………………………………………………… 4 分

由于$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{a}$,所以 $a=\sqrt{2}$,所以椭圆的方程为$\frac{y^2}{2}+x^2=1$. ………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由题可知直线 $EF$ 的斜率存在且不为 0,设直线 $EF$ 的方程为 $y=kx+m$,$E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,

则把 $y=kx+m$ 代入$\frac{y^2}{2}+x^2=1$ 得:$(k^2+2)x^2+2kmx+m^2-2=0$,

所以 $\Delta=4k^2m^2-4(k^2+2)(m^2-2)>0$,即 $k^2+2>m^2$.

则 $x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2+2}$,$x_1x_2=\frac{m^2-2}{k^2+2}$,

因为$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=-1$,所以 $x_1x_2+y_1y_2=-1$,即 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=-1$,

所以$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=-1$,所以$(1+k^2)(\frac{m^2-2}{k^2+2})+km(-\frac{2km}{k^2+2})+m^2=-1$,

$m^2-2+m^2k^2-2k^2-2m^2k^2+m^2k^2+2m^2=-k^2-2$,即 $3m^2=k^2$ 满足 $k^2+2>m^2$. ………………………… 10 分

所以 $k=\sqrt{3}m$ 或 $k=-\sqrt{3}m$,所以直线 $EF$ 的方程为 $y=\sqrt{3}mx+m=\sqrt{3}m(x+\frac{\sqrt{3}}{3})$或

$y=-\sqrt{3}mx+m=\sqrt{3}m(-x+\frac{\sqrt{3}}{3})$,所以直线 $EF$ 经过定点$(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$或$(\frac{\sqrt{3}}{3},0)$. ………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=x\ln x+ax^2+bx-3$,所以 $f'(x)=\ln x+2ax+b+1$, ……………………………… 1 分

因为曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=4x-5$,

所以$\begin{cases}f'(1)=4\\f(1)=-1\end{cases}$,即$\begin{cases}2a+b+1=4\\a+b-3=-1\end{cases}$,所以 $a=1,b=1$,

所以 $f(x)=x\ln x+x^2+x-3$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)因为 $g(x)=\frac{f(x)+3-x^2}{x^2}=\frac{x\ln x+x}{x^2}=\frac{\ln x+1}{x}$,

(ⅰ)因为 $g'(x)=\frac{x(\ln x+1)'-(\ln x+1)}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$,所以 $0<x<1$ 时,$g'(x)>0$,

当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,所以函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,………………… 5 分

所以 $g(x)\leqslant g(1)=1$,$g(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$,当 $x\to0$ 时,$g(x)\to-\infty$,

所以结合函数的图象可知函数 $y=g(x)-m$ 在区间$(0,\mathrm{e}]$上有 2 个不同的零点,

则$\frac{2}{\mathrm{e}}\leqslant m<1$. ………………………………………………………………………………………………… 7 分

(ⅱ)由 $g(x)\geqslant\frac{t}{x+1}$得 $t\leqslant\frac{(x+1)(1+\ln x)}{x}$. ……………………………………………………………… 8 分

令 $h(x)=\frac{(x+1)(1+\ln x)}{x}$,则 $h'(x)=\frac{x-\ln x}{x^2}$. …………………………………………………………… 9 分

令 $d(x)=x-\ln x$,则 $d'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

因为 $x>1$,所以 $d'(x)>0$,故 $d(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,

所以 $d(x)\geqslant d(1)=1>0$,从而 $h'(x)>0$,

$h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,……………………………………………………………………………………… 11 分

$h(x)\geqslant h(1)=2$,所以实数 $t$ 的取值范围是$(-\infty,2]$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)因为 $BE$ 是圆 $O$ 的切线,所以$\angle EBC=\angle BAC$, ………………………………………………… 1 分

四边形 $ABCD$ 是圆 $O$ 的内接四边形,所以$\angle CBD=\angle CAD$, …………………………………………… 2 分

因为 $BC$ 是$\angle EBD$ 的角平分线,所以$\angle CBD=\angle EBC$,…………………………………………………… 3 分

所以$\angle CAD=\angle BAC$,所以 $AC$ 是$\angle BAD$ 的角平分线.……………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$\angle EBC=\angle CBD=\angle BAC=\angle BDC$,所以 $BC=CD$, …………………………………… 6 分

因为$\angle BEC=\angle BEC$,所以$\triangle BEC\backsim\triangle AEB$,所以$\frac{EC}{EB}=\frac{BC}{AB}$, …………………………………… 8分

所以 $EB\cdot BC=AB\cdot EC$,所以 $EB\cdot CD=AB\cdot EC$. ……………………………………………… 10分

23.【解析】(Ⅰ)因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$, ………………………………………………………………… 1分

所以 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=1$,即 $\rho^2=1$,所以 $\rho=1$, ……………………………… 3分

由$\begin{cases}x=3\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$可得$\begin{cases}\frac{x}{3}=\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$,所以$\frac{x^2}{9}+y^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

所以曲线 $C_2$ 的普通方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ……………………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)因为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho>0)$,所以射线与 $C_1$ 的交点为 $A(1,\frac{\pi}{6})$,与 $C_2$ 的交点为 $B(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$

曲线 $C_2$ 与 $x$ 轴正半轴的交点为 $M(3,0)$, ………………………………………………………………… 7分

所以 $S_{\triangle OBM}=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$, ……………………………… 9分

所以 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle OBM}-S_{\triangle OAM}=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$. ……………………………………… 10分

24.【解析】(Ⅰ)因为 $a=1$,所以 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$,

即 $f(x)=\begin{cases}-3x,x<-1\\-x+2,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\3x,x>\frac{1}{2}\end{cases}$. ………………………………………………………………………………… 1分

由 $f(x)\leqslant3$ 可得①$\begin{cases}x<-1\\-3x\leqslant3\end{cases}$或②$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\-x+2\leqslant3\end{cases}$或③$\begin{cases}x>\frac{1}{2}\\3x\leqslant3\end{cases}$. ……………………………………… 3分

解得①无解,②$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,③$\frac{1}{2}<x\leqslant1$,所以 $f(x)\leqslant3$ 的解集为$\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$. ……………… 5分

(Ⅱ)因为 $x>1,a>0$,所以 $f(x)=|2x-1|+|x+a|=3x+a-1=3$,

即 $3x+a=4$. ……………………………………………………………………………………………………… 7分

因为 $x^2+a^2=\frac{1}{10}(x^2+a^2)(9+1)\geqslant\frac{1}{10}(3x+a)^2=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$, …………………………………… 9分

所以 $m\leqslant\frac{8}{5}$. ……………………………………………………………………………………………………… 10分

## (二)

1.D 【解析】因为 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{0,1,2\}$,因为据图可知阴影部分表示的集合为 $A\cap\complement_UB$,所以 $\complement_UB=\{-4,-3,-2,-1,3,4,5\}$,所以 $A\cap\complement_UB=\{3,4\}$.

2.B 【解析】因为$\frac{z+i}{1-2i}=\frac{1+i}{2-i}$,所以 $z+i=\frac{1+i}{2-i}(1-2i)=\frac{3-i}{2-i}$,所以 $z+i=\frac{(3-i)(2+i)}{5}=\frac{7+i}{5}$,所以 $z=\frac{7+i}{5}-i=\frac{7-4i}{5}$.

3.A 【解析】甲中的数据都不小于乙中的数据,所以$\overline{y_1}>\overline{y_2}$,但甲中的数据比乙中的数据波动幅度大,所以 $S_1>S_2$.

4.D 【解析】因为 $f(x)$ 是偶函数,所以图象关于 $y$ 轴对称,又因为 $f(x+1)=f(3-x)$,所以 $f(5.5)=f(-1.5)$,$f(3.5)=f(0.5)=f(-0.5)$,因为 $x\in[-2,0]$时,函数 $f(x)$是减函数,所以 $f(-1.5)>f(-1)>f(-0.5)$,即 $f(5.5)>f(-1)>f(3.5)$.

5.C 【解析】因为 $\bar{x}=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$,$\bar{y}=\frac{28+41+54+m+80}{5}=\frac{203+m}{5}$,所以$\frac{203+m}{5}=13.5\times4+1$ 解得

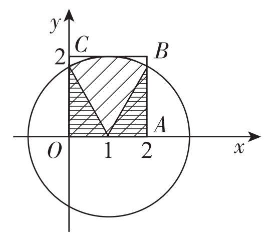
$m=72$.

6. B 【解析】根据三视图可知该几何体是由一个四分之一球和一个三棱锥组成，根据图中的数据可知半球的体积为 $V_1=\frac{1}{4}\times\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，三棱锥的体积为 $V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以该几何体的体积为 $V=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. A 【解析】因为 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，所以 $f(\alpha)=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{8}{5}$，$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{4}{5}$，因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\pi\Rightarrow\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\cos(2\alpha+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})=\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{24}{25}$.

8. B 【解析】因为以 $F_2$ 为圆心，$a$ 为半径的圆被双曲线的一条渐近线截得的弦长为 $2b$，所以 $a^2=2b^2$，则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{3}{2}$，所以 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

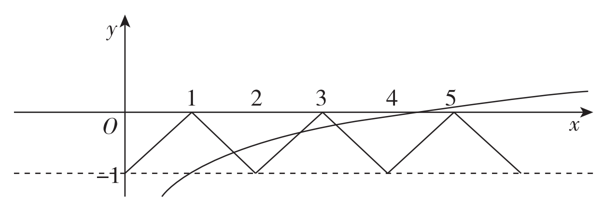
9. A 【解析】因为 $x,y$ 的所有取值围成如图所示的正方形 $OABC$，由于 $x^2+y^2-2x-3<0$ 化为 $(x-1)^2+y^2<4$，所以 $x,y$ 在以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆内，可得圆与 $y$ 轴和 $x=2$ 的交点为 $(0,\sqrt{3})$ 和 $(2,\sqrt{3})$，所以所得扇形的圆心角为 $60°$，所以阴影部分的面积为 $S=2\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$，所以概率为 $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.




10. B 【解析】因为 $n=2$，$s=m+4$，进入循环；$n=3$，$s=m+4-8=m-4$，进入循环；$n=4$，$m=s-4+16=m+12$，进入循环；$n=5$，$s=m+12-32=m-20$，退出循环，$y=\log_2(m-20)=2$，所以 $m-20=4\Rightarrow m=24$.

11. D 【解析】因为 $F(\frac{p}{2},0)$，所以直线方程为 $y=2(x-\frac{p}{2})$ 带入抛物线方程可得 $(2x-p)^2=2px$，即 $4x^2-6px+p^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{3p}{2}$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，所以 $y_1+y_2=2x_1-p+2x_2-p=2(x_1+x_2-p)=p$，所以圆心为 $(\frac{3}{4}p,\frac{1}{2}p)$，因为 $AB=x_1+x_2+p=\frac{5}{2}p$，所以圆的半径为 $\frac{5}{4}p$，因为圆与直线 $8x-6y+19=0$ 相切，所以 $\frac{3p+19}{10}=\frac{5p}{4}$，解得 $p=2$，所以抛物线方程为 $y^2=4x$.

12. D 【解析】因为 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，由于 $f(x-1)=f(x+1)$，所以 $f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，又因为当 $0<x<1$ 时，$(x-1)f'(x)<0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，因为 $0\leqslant x\leqslant1$，$-1\leqslant f(x)\leqslant0$，由图象可知，函数 $y=f(x)-\log_a x+1$ 至少有 4 个零点，需满足 $\begin{cases}a>1\\\log_a5-1\leqslant0\end{cases}$，即 $a\geqslant5$.

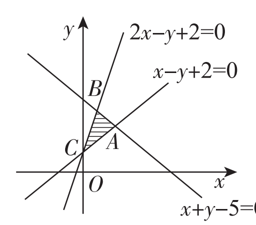



13. $e^2$ 【解析】因为 $-3<0\Rightarrow f(-3)=f(-3+2)=f(-1)=f(1)=e^{1+1}=e^2$.

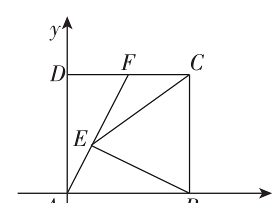
14. 2 【解析】不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分，令 $z=y-\frac{1}{2}x$，

所以直线 $y=\frac{1}{2}x+z$ 经过点 $C$ 时，$z$ 取得最小值，

所以 $(y-\frac{1}{2}x)_{\min}=2$.




15. $\frac{4}{5}$ 【解析】如图所示建立平面直角坐标系，所以 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，$F(1,2)$，所以直线 $AF$ 的方程为 $y=2x$，设 $E(a,2a)(0\leqslant a\leqslant1)$，所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB}=(2-a,2-2a)\cdot(2-a,-2a)=(2-a)^2-2a(2-2a)=5a^2-8a+4$，所以当 $a=\frac{4}{5}$ 时，$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}$ 有最小值为 $5\times(\frac{4}{5})^2-8\times\frac{4}{5}+4=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$.



16. $(4,6]$ 【解析】因为 $(b-a)\sin A+c\sin C=(c-b)\sin B+b\sin A$，由正弦定理得 $(b-a)a+c^2=(c-b)b+ab$，即 $ab-a^2+c^2=bc-b^2+ab$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$ 所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$4=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，即 $(b+c)^2\leqslant\dfrac{3}{4}(b+c)^2+4$，所以 $2<b+c\leqslant 4$，所以 $4<a+b+c\leqslant 6$.

17.【解析】(Ⅰ)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，点 $(n,S_n)$ 在曲线 $y=x^2$ 上，

所以 $S_n=n^2$，……………………………………………………………… 2分

所以 $a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，由于 $a_1=2-1=1$，

所以 $a_n=2n-1$. ……………………………………………………………… 4分

因为数列 $\{b_n\}$ 的对于任意的 $n$ 都满足 $b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}$ 且 $b_2=a_2$，$b_3=S_3$，

所以数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，$b_2=3$，$b_3=3q=1+3+5=9$，所以 $q=3$，所以 $b_n=b_2q^{n-2}=3^{n-1}$. ………… 6分

(Ⅱ)因为 $c_n=a_nb_n=(2n-1)3^{n-1}$，……………………………………………… 7分

所以 $T_n=1\times 3^0+3\times 3^1+5\times 3^2+\cdots+(2n-1)3^{n-1}$

$3T_n=1\times 3^1+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)3^n$，………………………………… 10分

所以 $-2T_n=1+2(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)3^n=(-2n+2)\cdot 3^n-2$，

所以 $T_n=(n-1)\cdot 3^n+1$. ……………………………………………………… 12分

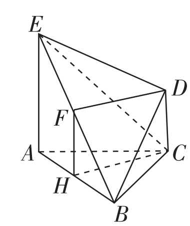
18.【解析】(Ⅰ)因为 $AE\perp$ 平面 $ABC$，$BC\subset$ 平面 $ABC$，所以 $AE\perp BC$，…………………… 1分

又因为 $AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，$\angle ACB=60°$，所以 $\angle ABC=90°$，………………………… 3分

所以 $AB\perp BC$，因为 $AE\cap AB=A$，所以 $BC\perp$ 平面 $ABE$，

因为 $BE\subset$ 平面 $ABE$，所以 $BC\perp BE$. ……………………………………………… 6分

(Ⅱ)如图所示取 $AB$ 的中点 $H$，连接 $FH$，$CH$，因为 $F$ 为 $BE$ 的中点，




所以 $HF\parallel AE$ 且 $HF=\dfrac{1}{2}AE$.

又因为 $AE\perp$ 平面 $ABC$，$CD\perp$ 平面 $ABC$，

所以 $CD\parallel AE$ 且 $CD=\dfrac{1}{2}AE$，……………………………………… 8分

所以 $CD\parallel HF$ 且 $CD=HF$，所以四边形 $CDFH$ 是平行四边形，…………………… 10分

所以 $CH\parallel DF$，因为 $CH\subset$ 平面 $ABC$，$DF\not\subset$ 平面 $ABC$，

所以 $DF\parallel$ 平面 $ABC$. ……………………………………………………… 12分

19.【解析】(Ⅰ)因为高考成绩在 $[80,90)$ 的频率为 0.15，所以有 $0.15\times 100=15$ 人. ………… 1分

高考成绩在 $[90,100)$ 的有 15 人，所以频率 $\dfrac{15}{100}=0.15$；高考成绩在 $[100,110)$ 的频率为 0.2，

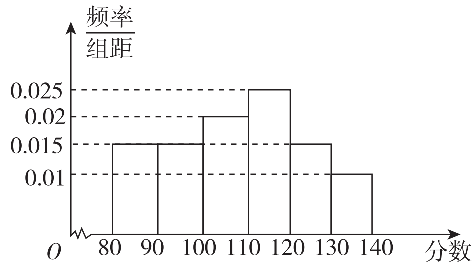
所以有 $0.2\times 100=20$ 人，高考成绩在 $[110,120)$ 的人数为 25 人，所以频率为 $\dfrac{25}{100}=0.25$，

高考成绩在 $[130,140]$ 的人数为 10 人，所以频率为 $\dfrac{10}{100}=0.1$，所以高考成绩在 $[120,130)$ 的人数为 $100-15-15-20-25-10=15$ 人，所以频率为 $\dfrac{15}{100}=0.15$. ………………………… 3分

所以频率分布表为

| 考生所得分数 | 人数 | 频率 |
|---|---|---|
| [80,90) | 15 | 0.15 |
| [90,100) | 15 | 0.15 |
| [100,110) | 20 | 0.2 |
| [110,120) | 25 | 0.25 |
| [120,130) | 15 | 0.15 |
| [130,140] | 10 | 0.1 |

……………………………………………………………………………… 4分

频率分布直方图为 


…………………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)根据频率分布直方图可知分数在[120,130)的有 15 人,分数在[130,140]的有 10 人, ………… 7 分

所以成绩在[120,130)抽取 $15\times\frac{1}{5}=3$ 人,记为 $b_1,b_2,b_3$,

成绩在[130,140]抽取 $10\times\frac{1}{5}=2$ 人,记为 $a_1,a_2$, ………………………………………… 8 分

从中抽取 2 人共有 $(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)$ 10 种取法, ……………………………………………………………………………… 10 分

这 2 人中恰好有一人的成绩在[130,140]的共有 $(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)$ 6 种取法. ……………………………………………………………………………… 11 分

所以从这 5 人中随机抽取 2 人作进一步了解,这 2 人中恰好有一人的成绩在[130,140]的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)因为椭圆的离心率是 $\frac{1}{2}$,所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,即 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即 $3a^2=4b^2$, ……………… 1 分

因为抛物线 $y^2=\frac{\sqrt{3}}{4}x$ 上点 $P$ 到该抛物线准线的距离为 $\frac{17\sqrt{3}}{16}$,

所以 $x_p=\frac{17\sqrt{3}}{16}-\frac{\sqrt{3}}{16}=\sqrt{3}$,所以 $y_p=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………………………………… 2 分

又因为椭圆经过点 $P$,所以 $\frac{3}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$,即 $\frac{3}{a^2}+\frac{3}{3a^2}=1$,即 $a^2=4$,所以 $a=2,c=1$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,所以 $F_1(-1,0)$,所以设过 $F_1(-1,0)$ 的直线方程为 $x=my-1$,

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+\frac{11}{8},y_1)\cdot(x_2+\frac{11}{8},y_2)=(my_1-1+\frac{11}{8},y_1)\cdot(my_2-1+\frac{11}{8},y_2)$

$=(m^2+1)y_1y_2+\frac{3}{8}m(y_1+y_2)+\frac{9}{64}$, …………………………………………………… 6 分

联立 $\begin{cases}x=my-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 可得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$, ……………………………………………… 8 分

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(m^2+1)\times\frac{-9}{3m^2+4}+\frac{3}{8}m\times\frac{6m}{3m^2+4}+\frac{9}{64}=\frac{-9(m^2+1)}{3m^2+4}+\frac{9m^2}{4(3m^2+4)}+\frac{9}{64}$

$=\frac{16(-27m^2-36)+9(3m^2+4)}{64(3m^2+4)}=\frac{-135(3m^2+4)}{64(3m^2+4)}=-\frac{135}{64}$. ………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=\frac{2x-2}{x^2+1}$,所以 $f'(x)=\frac{-2x^2+4x+2}{(x^2+1)^2}$,所以 $f'(1)=1$,

由于 $f(1)=0$,所以 $y=x-1$. …………………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)因为 $h(x)=g(x)-f(x)=m\ln x-\dfrac{2x-2}{x^2+1}$，根据题意 $m\ln x-\dfrac{2x-2}{x^2+1}\geqslant 0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，

因为 $m\geqslant 1$，所以只需要证明 $\ln x-\dfrac{2x-2}{x^2+1}\geqslant 0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，

即证明$(x^2+1)\ln x\geqslant 2x-2$，即 $x^2\ln x+\ln x-2x+2\geqslant 0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立. …………………… 5 分

设 $p(x)=x^2\ln x+\ln x-2x+2$，$p'(x)=2x\ln x+x+\dfrac{1}{x}-2$. …………………………………… 6 分

因为 $x\geqslant 1$，所以 $2x\ln x\geqslant 0$，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，即 $p'(x)\geqslant 0$，

所以 $p(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$p(x)\geqslant p(1)=0$，

所以 $h(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$上恒成立. ………………………………………………………… 9 分

(Ⅲ)由(Ⅱ)可知，不等式 $\ln x\geqslant\dfrac{2x-2}{x^2+1}$在$[1,+\infty)$上恒成立，

因为 $0<a<b$，所以$\dfrac{b}{a}>1$，所以 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(\frac{b}{a})-2}{(\frac{b}{a})^2+1}$. ………………………………………………… 10 分

整理得$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$，所以当 $0<a<b$ 时，$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$. ………………………… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)证明：因为 $AB$ 是$\odot O$ 的直径，$AE$ 是$\odot O$ 的切线，

所以 $AE\perp AB$. 又因为 $CD\perp AB$，所以 $CD/\!/AE$， …………………………………………………… 2 分

所以$\triangle ABF\backsim\triangle DBH$，$\triangle EFB\backsim\triangle CHB$，

所以$\dfrac{AF}{DH}=\dfrac{BF}{BH}$，$\dfrac{EF}{CH}=\dfrac{BF}{HB}$. 所以$\dfrac{AF}{HD}=\dfrac{EF}{CH}$， …………………………………………………… 4 分

因为 $F$ 是 $AE$ 的中点，所以 $AF=EF$，所以 $CH=DH$. …………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $AE$ 为该圆 $O$ 的切线，$EB$ 为该圆 $O$ 的割线，所以 $AE^2=EC\cdot EB$，……………………… 6 分

所以 $4=EC(EC+3)$，所以 $EC=1$， ……………………………………………………………………… 7 分

又因为 $AB$ 为圆 $O$ 的直径，所以 $AC\perp BE$，所以 $AC=\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{3}$，……………………………… 9 分

由 $AC^2=AD\times AB$，所以 $AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)因为直线 $l$ 经过点$(2,1)$且倾斜角为 $45°$，

所以直线 $l$ 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)，…………………………………………………… 2 分

因为曲线 $C$ 的极坐标方程为 $3\rho^2+\rho^2\cos 2\theta=4$，所以 $3\rho^2+\rho^2(2\cos^2\theta-1)=4$，

即 $\rho^2+\rho^2\cos^2\theta=2$，因为 $x=\rho\cos\theta$，$x^2+y^2=\rho^2$，

所以曲线 $C$ 的直角坐标方程 $2x^2+y^2=2$. ………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为$\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，所以 $2(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=2$，

所以$\dfrac{3}{2}t^2+5\sqrt{2}t+7=0$， ………………………………………………………………………………… 6 分

所以 $t_1+t_2=-\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2=\dfrac{14}{3}$，所以 $AB=|t_1-t_2|=\sqrt{\dfrac{200}{9}-\dfrac{14\times 4}{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，…………………… 8 分

而直线 $l$ 的普通方程为 $x-y-1=0$，原点 $O$ 到直线 $l$ 的距离为 $d=\dfrac{|-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，……………………… 9 分

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}$. …………………………………………………… 10 分

24.【解析】(Ⅰ)因为 $a=1$,所以 $f(x)=\log_2(|x-2|+|x+1|-4)$,

所以 $|x-2|+|x+1|-4>0$,可得①$\begin{cases}x<-1\\-2x+1>4\end{cases}$或②$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2\\3>4\end{cases}$或③$\begin{cases}x>2\\2x-1>4\end{cases}$, …………… 3 分

解得①$x<-\frac{3}{2}$,②无解,③$x>\frac{5}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{3}{2}\text{或 }x>\frac{5}{2}\right\}$. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为对任意 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立,所以 $\log_2(|x-2|+|x+a|-4)\geqslant 1$ 恒成立,

即 $|x-2|+|x+a|-4\geqslant 2$ 恒成立,所以 $|x-2|+|x+a|\geqslant 6$, ………………………………………… 6 分

因为 $|x-2|+|x+a|\geqslant|2-x+x+a|=|a+2|$,所以 $|a+2|\geqslant 6$, ………………………………… 8 分

所以 $a\geqslant 4$ 或 $a\leqslant -8$,因为 $a>0$,所以 $a\geqslant 4$. …………………………………………………… 10 分

## (三)

1. D 【解析】由 $x-1>0$,得 $x>1$,所以 $A\cap B=\{2,3\}$.

2. C 【解析】因为 $z=\frac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以对应的点$(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$位于第三象限.

3. C 【解析】当 $x>0$ 时,$x+\frac{4}{x}\geqslant 4$,所以 $p$ 为真命题,$\forall x>0,2^x>1$,所以 $q$ 为假命题,所以$(\neg p)\vee(\neg q)$是真命题.

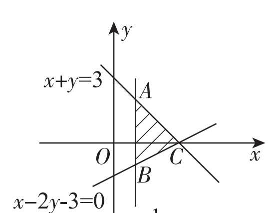
4. B 【解析】设双曲线的方程为 $x^2-4y^2=\lambda,\lambda>0$,即$\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1$,由题意知$\frac{\lambda}{4}+\lambda=5$,所以 $\lambda=4$,双曲线 $C$ 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

5. D 【解析】A 项"$x=-1$"是"$x^2-5x-6=0$"的充分不必要条件,由相关系数的含义知 $|r|$ 越接近 1,变量之间的线性相关程度越高,故 B 错误,命题"$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+x+1<0$"的否定为"$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2+x+1\geqslant 0$"故 C 项错误,D 项原命题正确,所以逆否命题为真命题.

6. C 【解析】由程序框图的循环结构得输出的 $x$ 为 12.

7. A 【解析】由题意知 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$,所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,因为当 $x=\frac{\pi}{12}$时,$f(x)$ 取得最大值,所以 $f(x)=\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=1$,又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$,令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,$\therefore f(x)$ 的单调减区间为$[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7}{12}\pi+k\pi],k\in\mathbf{Z}$.

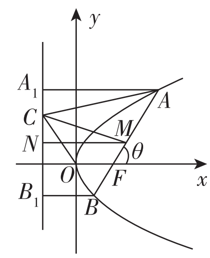
8. C 【解析】若 $q=1$,则有 $S_3=3a_1,S_6=6a_1,S_9=9a_1$,由 $a_1\neq 0$,不满足 $2S_9=S_6+S_3$,所以 $q\neq 1$,又依题意 $2S_9=S_6+S_3$,可得$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$,所以 $1-q^3+(1-q^3)(1+q^3)=2(1-q^3)(1+q^3+q^6)$,即 $1+1+q^3=2(1+q^3+q^6)$,$q^3=-\frac{1}{2}$,由 $a_2+a_5=2a_m$,得 $a_2+a_2q^3=2a_2q^{m-2}$,$\frac{1}{2}=2\times(q^3)^{\frac{m-2}{3}}=2\times(-\frac{1}{2})^{\frac{m-2}{3}}$,得 $m=8$.



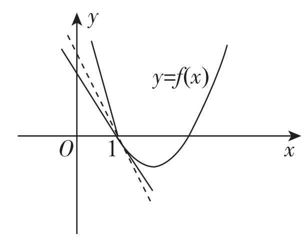

9. C 【解析】作出其平面区域如图所示,$A(1,2)$,$B(1,-1)$,$C(3,0)$,若 $z=kx-y$ 在点 $A$ 取得最小值$-1$,则 $k-2=1$,得 $k=3$,此时 $y=3x-z$ 在点 $C$ 取得最大值 9,符合题意,若 $z$ 在点 $B$ 取得最小值$-1$,则 $k+1=1$,得 $k=0$,此时不符合题意,若 $z$ 在点 $C$ 取得最小值$-1$,则 $3k=-1$,得 $k=-\frac{1}{3}$,此时 $z_{\max}=-\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{2}{3}$,不符合题意,综上

所述 $k=3$.

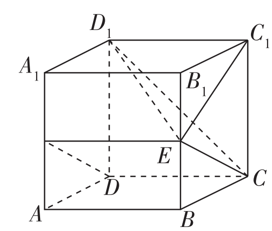
10. C 【解析】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$,设 $AB$ 的中点为 $M$,过 $A$、$B$、$M$ 分别作 $AA_1$、$BB_1$、$MN$ 垂直于直线 $x=-1$ 于 $A_1$、$B_1$、$N$,设 $\angle AFx=\theta$,由抛物线的定义可知 $|MN|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)=\frac{1}{2}|AB|$,因为 $|MC|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$,$|MN|=\frac{1}{\sqrt{3}}|MC|$,$\angle CMN=90°-\theta$,所以 $\cos\angle CMN=\cos(90°-\theta)=\frac{|MN|}{|MC|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,即 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$,所以 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,根据对称性可知 $AB$ 斜率为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.




11. C 【解析】当 $x\leqslant 1$ 时,如图所示,由图象可知 $f(x)\geqslant k(x-1)$,此时需满足 $k\geqslant -5$,当 $x>1$ 时,$f(x)=x^3-6x+5$,此时 $f'(x)=3x^2-6=3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$,令 $f'(x)>0$,得 $x>\sqrt{2}$,令 $f'(x)<0$,得 $1<x<\sqrt{2}$,所以 $f(x)$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上为减函数,在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上为增函数,作出草图如图所示,又因为 $f'(1)=-3$,此时要使 $f(x)\geqslant k(x-1)$ 需满足 $k\leqslant -3$,综上所述,得 $-5\leqslant k\leqslant -3$.



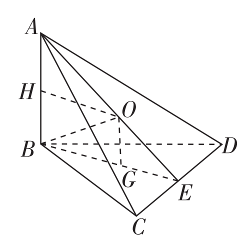

12. B 【解析】该几何体是如图所示的棱长为 4 的正方体内的三棱锥 $E-CC_1D_1$(其中 $E$ 为 $BB_1$ 的中点)和一个三棱柱的组合体,其中三棱锥的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\times 4=\frac{32}{3}$,三棱柱的体积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 4\times 4=16$,所以其体积为 $\frac{80}{3}$.




13. 4 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2=0$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$.

14. 10 【解析】由题意知 $g(x)$ 为减函数,$f(x)$ 为增函数,要使"对任意的实数 $x_1$,存在唯一的 $x_2\in(-\infty,0]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立",需满足 $f(0)\geqslant 1$,即 $\lg a\geqslant 1$,$a\geqslant 10$.

15. $\frac{28}{3}\pi$ 【解析】取 $CD$ 的中点 $E$,连结 $AE$,$BE$,因为在三棱锥 $A-BCD$ 中,$AB\perp$ 平面 $BCD$,$\triangle BCD$ 是等边三角形,所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle ABD$,$\triangle ACD$ 是等腰三角形,设 $\triangle BCD$ 的中心为 $G$,作 $OG/\!/AB$ 交 $AB$ 的中垂线 $OH$ 于点 $O$,则 $O$ 为外接球的球心,$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$,$BG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $R^2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$,$R=\frac{\sqrt{21}}{3}$,球 $O$ 的表面积为 $4\pi R^2=\frac{28}{3}\pi$.




16. 470 【解析】注意到 $\cos\frac{2n\pi}{3}$ 的周期为 3,因为

$a_{3n-2}=(3n-2)^2\cos(\frac{6n\pi-4\pi}{3})=(3n-2)^2\cos(2n\pi-\frac{4\pi}{3})=-\frac{(3n-2)^2}{2}$,

$a_{3n-1}=(3n-1)^2\cdot\cos(\frac{6n\pi-2\pi}{3})=(3n-1)^2\cos(2n\pi-\frac{2\pi}{3})=-\frac{(3n-1)^2}{2}$,

$a_{3n}=(3n)^2\cos(\frac{6n\pi}{3})=9n^2$,所以 $a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=-\frac{1}{2}[(3n-2)^2+(3n-1)^2]+9n^2=9n-\frac{5}{2}$,$S_{30}=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{28}+a_{29}+a_{30})=(9\times 1-\frac{5}{2})+(9\times 2-\frac{5}{2})+\cdots+(9\times 10-\frac{5}{2})=9(1+2+\cdots+10)-\frac{5}{2}\times 10=470$.

17.【解析】(Ⅰ)由正弦定理以及 $b\cos^2 A=a(2-\sin A\sin B)$,

得 $\sin B\cos^2 A=\sin A(2-\sin A\sin B)$,

即 $\sin B\cos^2 A=2\sin A-\sin A^2\sin B$,所以 $\sin B=2\sin A$,

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………… 6 分

（Ⅱ）由余弦定理以及 $c=\sqrt{5}$，$b=2a$，

得 $(2a)^2=a^2+5-2a\times\sqrt{5}\times\cos B=a^2+5-2a$，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{5}{3}$（舍）

解得 $a=1$，$b=2$. ……………………………………………………………………………… 12 分

18.【解析】（Ⅰ）由已知可得，样本中有 $A$ 职业的顾客 $100\times\frac{300}{300+200}=60$ 名，

$B$ 职业的顾客 $100\times\frac{200}{300+200}=40$ 名，

所以样本中日平均消费额不足 60 元的顾客中，$A$ 职业的顾客有 $60\times0.05=3$ 人，记为 $A,B,C$，
$B$ 职业的顾客有 $40\times0.05=2$ 人，记为 $a,b$，
故从中随机抽取 2 名顾客所有可能的结果有 $(A,B)$，$(A,C)$，$(A,a)$，$(A,b)$，$(B,C)$，$(B,a)$，$(B,b)$，$(C,a)$，$(C,b)$，$(a,b)$，共 10 种，
其中至少有 1 名 $A$ 职业的顾客的结果有 $(A,a)$，$(A,b)$，$(B,a)$，$(B,b)$，$(C,a)$，$(C,b)$，$(A,B)$，$(A,C)$，$(B,C)$，共 9 种，

故所求的概率为 $P=\frac{9}{10}$. ………………………………………………………………… 6 分

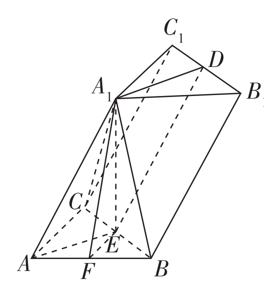
（Ⅱ）由频率分布直方图可知：在抽取的 100 名顾客中，
$A$ 职业的顾客中“网购达人”的频率为 $1-10\times(0.025+0.05)=0.70$，其频数为 $60\times0.70=42$ 人，
$B$ 职业的顾客中“网购达人”的频率为 $1-10\times(0.035+0.05)=0.60$，其频数为 $40\times0.60=24$ 人，
据此可得 $2\times2$ 列联表如下：

| | 网购达人 | 非网购达人 | 合计 |
|---|---|---|---|
| $A$ 职业的顾客 | 42 | 18 | 60 |
| $B$ 职业的顾客 | 24 | 16 | 40 |
| 合计 | 66 | 34 | 100 |

所以可得 $K^2=\frac{100\times(42\times16-24\times18)^2}{66\times34\times40\times60}\approx1.07$，………………………………… 10 分

因为 $1.07<2.706$，所以没有 $90\%$ 的把握认为“网购达人与职业 $A$ 和 $B$ 有关”. ……………… 12 分

19.【解析】（Ⅰ）连接 $AE$，$DE$，因为 $A_1E\perp$ 平面 $ABC$，所以 $A_1E\perp AE$，
因为 $AB=AC$，所以 $AE\perp BC$.
又 $A_1E\cap BC=E$，所以 $AE\perp$ 平面 $A_1BC$.
由 $D$，$E$ 分别为 $B_1C_1$，$BC$ 的中点，得 $DE\parallel BB_1$ 且 $DE=BB_1$，
从而 $DE\parallel AA_1$ 且 $DE=AA_1$，
所以 $AA_1DE$ 是平行四边形，所以 $A_1D\parallel AE$，
因为 $AE\perp$ 平面 $A_1BC$，所以 $A_1D\perp$ 平面 $A_1BC$，$A_1B\subset$ 平面 $A_1BC$，
所以 $A_1D\perp A_1B$. ……………………………………………………………………………… 6 分




（Ⅱ）因为 $AE\perp$ 平面 $A_1BC$，所以 $BC\perp A_1E$，
又 $BC\perp AE$，所以 $BC\perp$ 平面 $AA_1DE$.
因为 $DE\subset$ 平面 $AA_1DE$，所以 $BC\perp DE$，

矩形 $BCC_1B_1$ 的面积为 $4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，

由 $AB=AC=2$，$\angle CAB=90^\circ$，所以 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}=2\times\frac{1}{2}\times2\times2=4$，得 $EA=EB=\sqrt{2}$.

由 $AE\perp$ 平面 $A_1BC$，得 $A_1E=\sqrt{4^2-2}=\sqrt{14}$，
过点 $A_1$ 作 $A_1F\perp AB$，连接 $EF$，又 $AB\perp A_1E$，则 $AB\perp$ 平面 $A_1EF$，

所以 $AB\perp EF$，$EF=\frac{1}{2}AC=1$，$A_1F=\sqrt{14+1}=\sqrt{15}$，

所以平行四边形 $A_1ABB_1$ 的面积为 $S_{\square A_1ABB_1}=2\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}$，

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积为 $S=4\sqrt{15}+8\sqrt{2}+4$. …………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)因为椭圆 $E$ 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $a^2=3b^2$，

故椭圆 $E$ 的方程可设为$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则椭圆 $E$ 的上顶点的坐标为$(0,b)$，

过上顶点且倾斜角为 $45°$的直线方程为 $l'$：$y=x+b$，

设直线$l'$与椭圆 $E$ 的交点记为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x+b\end{cases}$，消去 $y$，

得 $2x^2+3bx=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{3b}{2}$，

因为$|AB|=\sqrt{1+1^2}\,|x_1-x_2|=\frac{3\sqrt{2}b}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，解得 $b=1$.

故椭圆 $E$ 的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)(ⅰ)当切线 $l$ 的斜率存在且不为 0 时，设 $l$ 的方程为 $y=kx+m$，

联立直线 $l$ 和椭圆 $E$ 的方程，得$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}$，

消去 $y$ 并整理，得$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

因为直线 $l$ 和椭圆 $E$ 有且仅有一个交点，所以 $\Delta=36k^2m^2-4(3k^2+1)(3m^2-3)=0$，

化简并整理，得 $m^2=3k^2+1$，

因为直线 $FQ$ 与 $l$ 垂直，所以直线 $FQ$ 的方程为：$y=-\frac{1}{k}(x-\sqrt{2})$，

联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}(x-\sqrt{2}),\\ y=kx+m,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}-km}{1+k^2},\\ y=\frac{\sqrt{2}k+m}{1+k^2},\end{cases}$ 即 $Q(\frac{\sqrt{2}-km}{1+k^2},\frac{\sqrt{2}k+m}{1+k^2})$

所以$|OQ|^2=x^2+y^2=\frac{(\sqrt{2}-km)^2+(\sqrt{2}k+m)^2}{(1+k^2)^2}=\frac{k^2m^2+2k^2+m^2+2}{(1+k^2)^2}=\frac{(k^2+1)(m^2+2)}{(1+k^2)^2}=\frac{m^2+2}{1+k^2}$，

把 $m^2=3k^2+1$ 代入上式得$|OQ|^2=x^2+y^2=3$①，…………………………………………………………… 9 分

(ⅱ)当切线 $l$ 的斜率为 0 时，此时存在 $Q(\sqrt{2},1)$，符合①式；……………………………………………… 10 分

(ⅲ)当切线 $l$ 的斜率不存在时，此时 $Q(\sqrt{3},0)$或$(-\sqrt{3},0)$，符合①式，………………………………… 11 分

综上所述 $Q$ 点到原点的距离为定值$\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)$f'(x)=e^x-a$，当 $a=4$ 时，$f(0)=1$，$f'(0)=1-4=-3$，

所以线 $f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y-1=-3x$，即 $3x+y-1=0$. ……………………………… 2 分

(Ⅱ)当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，存在 $x<0$ 时，$f(x)<0$，不符合题意；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln a$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上递减，$f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上递增，

$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$，由题意知 $a-a\ln a\geqslant 0$，得 $0<a\leqslant e$. ………………………………… 6 分

(Ⅲ)当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$[0,|a|]$上为增函数，$f(x)_{\max}=f(-a)=e^{-a}+a^2$，

当 $a>0$ 时，令 $M(a)=a-\ln a$，则 $M'(a)=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}$，

当 $0<a<1$ 时，$M'(a)<0$，当 $a>1$ 时，$M'(a)>0$，

所以 $M(a)>M(1)=0$，所以 $a>\ln a$，

由（Ⅱ）知 $f(x)$ 在 $[0,\ln a)$ 上递减，$f(x)$ 在 $(\ln a,a]$ 上递增，

即有 $f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(a)\}$，

因为 $f(0)=e^0-0=1$，$f(a)=e^a-a^2$，

令 $h(a)=e^a-a^2-1$，则 $h'(a)=e^a-2a$，

设 $H(a)=e^a-2a$，则 $H'(a)=e^a-2$，

当 $0<a<\ln2$ 时，$H'(a)<0$，当 $a>\ln2$ 时，$H'(a)>0$，

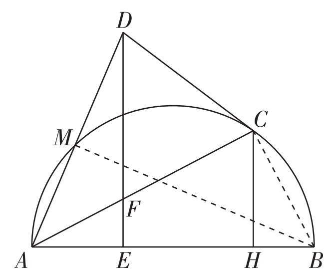
所以 $H(a)_{\min}=H(\ln2)=2-2\ln2>0$，

即 $h'(a)>h'(0)=0$，所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(a)>h(0)=0$，

所以 $f(a)>f(0)$，所以 $f(x)_{\max}=f(a)=e^a-a^2$，

综上所述，$f(x)$ 在 $[0,|a|]$ 上 $f(x)_{\max}=f(|a|)=e^{|a|}-a|a|$. …………………………………………………… 12 分

22.【解析】证明：（Ⅰ）连结 $BC$，




因为 $CD$ 是圆的切线，$AC$ 是弦，所以 $\angle DCF=\angle CBA$，

因为 $DF=DC$，所以 $\angle DCF=\angle DFC$，$\angle DFC=\angle CBA$，

又因为 $CH\perp AB$，$\angle ACB=90^\circ$，所以 $\triangle ACH\backsim\triangle ABC$，

所以 $\angle ACH=\angle CBA$，$\angle ACH=\angle DFC$，$DE\parallel CH$. ……………………… 5 分

（Ⅱ）设 $AD$ 与半圆交于点 $M$，连结 $BM$，

因为 $CD$ 是圆的切线，所以 $DC^2=DA\cdot DM$，

又因为 $DE\perp AB$，$\angle AMB=90^\circ$，所以 $\triangle AED\backsim\triangle AMB$，

所以 $\dfrac{AE}{DA}=\dfrac{AM}{AB}$，即 $AE\cdot AB=DA\cdot AM$，

所以 $DA^2-DF^2=DA^2-DC^2=DA^2-DA\cdot DM=DA\cdot(DA-DM)=DA\cdot AM=AE\cdot AB$. ……… 10 分

23.【解析】（Ⅰ）利用极坐标公式，把曲线 $C$ 的极坐标方程 $\rho=2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$ 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$，

所以普通方程是 $x^2+y^2=2y+2x$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. ………………………………………… 4 分

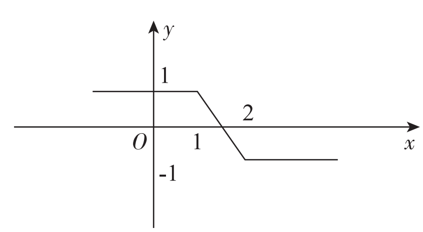
（Ⅱ）直线与曲线 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $P$，

把直线的参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入曲线 $C$ 的普通方程 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 中，得 $t^2-t-1=0$，所以 $\begin{cases}t_1+t_2=1\\ t_1\cdot t_2=-1\end{cases}$.

所以 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{5}$. ……………………………………… 10 分

24.【解析】（Ⅰ）函数 $f(x)=|x-2|-|x-1|=\begin{cases}1,x\leqslant1\\ -2x+3,1<x<2,\\ -1,x\geqslant2\end{cases}$




由图象知函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$. ……………………………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $m=1$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1$，

$a+2b+3c=(a+2b+3c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c})$

$=1+1+1+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2b}+\dfrac{3c}{a}+\dfrac{a}{3c}+\dfrac{2b}{3c}+\dfrac{3c}{2b}$，

而 $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{2b}\geqslant2$，$\dfrac{3c}{a}+\dfrac{a}{3c}\geqslant2$，$\dfrac{2b}{3c}+\dfrac{3c}{2b}\geqslant2$，所以 $a+2b+3c\geqslant9$，

当且仅当$\begin{cases}a=2b=3c\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=1\end{cases}$,即 $a=3,b=\dfrac{3}{2},c=1$ 时等号成立. …………………………………………… 10 分

# (四)

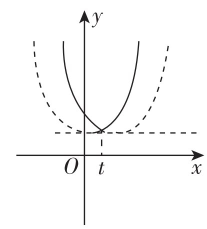
1. D 【解析】因为 $A=\{x|x^2-2x<0\}=(0,2)$,$B=(-\infty,0)$,所以 $A\cup B=(-\infty,0)\cup(0,2)$.

2. A 【解析】因为 $z=\dfrac{3+i}{1-i}=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$,所以 $z$ 的共轭复数为 $1-2i$.

3. C 【解析】由题意知$\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+1}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+2}=\dfrac{1}{9}$.

4. B 【解析】甲、乙到同一个地方旅游的情况有 3 种,甲、乙到不到同一个地方旅游的情况有 6 种,所以甲、乙不到同一地方旅游的概率为$\dfrac{6}{3+6}=\dfrac{2}{3}$.

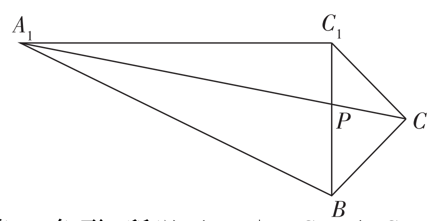
5. C 【解析】同一坐标系下作出 $y=e^{|x|}$,$y=e^{|x-t|}$ 的图象,可得函数 $f(x)=\max\{e^{|x|},e^{|x-t|}\}$的图象如实线所示,




由函数 $f(x)=\max\{e^{|x|},e^{|x-t|}\}$的图象关于 $x=\dfrac{t}{2}$对称可得$\dfrac{t}{2}=2016$,$t=4032$.

6. B 【解析】第一次循环 $S=1,i=2,A=3$,第二次循环 $S=\dfrac{4}{3},i=3,A=6$,第三次循环 $S=\dfrac{3}{2},i=4,A=10$,第四次循环 $S=\dfrac{8}{5},i=5,A=15$,第五次循环 $S=\dfrac{5}{3},i=6>5$,输出$\dfrac{5}{3}$.

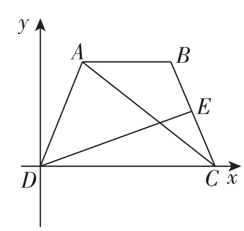
7. C 【解析】因为 $x^2-x+\dfrac{1}{4}=(x-\dfrac{1}{2})^2\geqslant 0$,所以①正确;②正确;③$a>b$ 推不出 $\lg a>\lg b$,反之由对数函数的单调性可知成立,所以是必要不充分条件,故③错误;由逆否命题的定义知④正确.




8. B 【解析】由题意 $BC_1=4$,$AB=\sqrt{36+8}=\sqrt{44}$,所以 $A_1B=2\sqrt{13}$,$A_1C_1\perp BC_1$,$\triangle A_1C_1B$ 为直角三角形,沿 $BC_1$ 展开,$\triangle CC_1B$ 是等腰直角三角形,所以 $A_1P+PC=A_1C=2\sqrt{17}$.

9. B 【解析】建立如图所示的平面直角坐标系,由已知得 $D(0,0)$,$A(1,\sqrt{3})$,$B(3,\sqrt{3})$,$C(4,0)$,因为 $E$ 是 $BC$ 的中点,所以 $E(\dfrac{7}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$,$\overrightarrow{AC}=(3,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DE}=(\dfrac{7}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$,

则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=3\times\dfrac{7}{2}+(-\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9$.

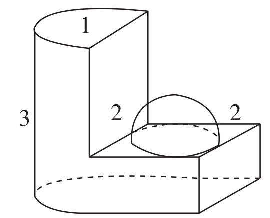



10. C 【解析】由余弦定理得$\dfrac{2\sin C-\sqrt{3}\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)}{b^2+c^2-a^2}=\dfrac{2\sqrt{3}ac\cos B}{2bc\cos A}=\dfrac{\sqrt{3}a\cos B}{b\cos A}$,由

正弦定理得$\dfrac{2\sin C-\sqrt{3}\sin B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}\sin A\cos B}{\sin B\cos A}$,即 $2\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos B$,$2\sin C\cos A=\sqrt{3}\sin C$,

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$A=\dfrac{\pi}{6}$.

11. C 【解析】如图所示,由三视图可知,该几何体左侧是一个半圆柱,底面的半径是 1,高为 3,右侧下面是一个正四棱柱,四棱柱的底面是一个正方形,边长是 2,四棱柱的高为 1,右侧上面是半球,所以该几何体的体积为$\dfrac{1}{2}\pi\times1^2\times3+2\times2\times1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi\times1^3=4+\dfrac{13}{6}\pi$.



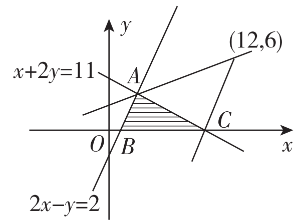
12. A 【解析】原题等价于 $x\in[\frac{1}{2},2]$，满足 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$，

因为 $f'(x)=\frac{4}{x}-a-\frac{a+3}{x^2}=\frac{-ax^2+4x-(a+3)}{x^2}$，令 $F(x)=-ax^2+4x-(a+3)$ 当 $a\geqslant 1$ 时，$\Delta=16-4a(a+3)\leqslant 0$，所以 $F(x)\leqslant 0$ 即 $f'(x)\leqslant 0$，则函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上为减函数，且在 $x\in[\frac{1}{2},2]$ 上最大值为 $f(\frac{1}{2})=-4\ln 2+\frac{3}{2}a+6$，$g'(x)=2e^x-4$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=\ln 2$，当 $x\in[\frac{1}{2},\ln 2]$ 时，$g'(x)<0$，所以得 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2},\ln 2]$ 上为减函数，当 $x\in[\ln 2,2]$ 时，$g'(x)>0$，所以得 $g(x)$ 在 $[\ln 2,2]$ 上为增函数，所以函数 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上最小值为 $g(\ln 2)=4-4\ln 2+2a$，由题意可知 $-4\ln 2+\frac{3}{2}a+6>4-4\ln 2+2a$，解得 $1\leqslant a<4$.

13. $\frac{5}{4}$ 【解析】由题意知圆心 $(-1,1)$ 到抛物线的准线方程 $y=\frac{9}{4}$ 的距离为 $\frac{5}{4}$.

14. $-\frac{2\pi}{5}$ 【解析】函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位得 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{5}+\varphi)$，由于函数图象关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\varphi+\frac{2\pi}{5}=0$，得 $\varphi=-\frac{2\pi}{5}$.

15. $[\frac{1}{7},\frac{9}{11}]$ 【解析】由题意知 $\frac{1}{z}=\frac{x+y-18}{x-12}=\frac{y-6}{x-12}+1$，令 $u=\frac{y-6}{x-12}$，则 $u$ 表示 $(12,6)$ 与 $(x,y)$ 连线的斜率，作出可行域如图，联立 $\begin{cases}2x-y-2=0\\x+2y-11=0\end{cases}$ 得 $A(3,4)$，由图象可知在 $A$ 点时，$u$ 取得最小值，$u_{\min}=\frac{4-6}{3-12}=\frac{2}{9}$，在 $C(11,0)$ 点时，$u_{\max}=\frac{0-6}{11-12}=6$，由题意知 $\frac{11}{9}\leqslant\frac{1}{z}\leqslant 7$，所以 $\frac{1}{7}\leqslant z\leqslant\frac{9}{11}$.




16. $\sqrt{37}$ 【解析】依题意，由 $\begin{cases}y=-3x+3c\\y=\frac{b}{a}x\end{cases}$ 得，$P$ 点的横坐标为 $\frac{3ac}{3a+b}$，由 $\begin{cases}y=-3x+3c\\y=-\frac{b}{a}x\end{cases}$ 得，$Q$ 点的横坐标为 $\frac{3ac}{3a-b}$，所以 $M$ 点的横坐标为 $\frac{1}{2}(\frac{3ac}{3a+b}+\frac{3ac}{3a-b})=\frac{9a^2c}{9a^2-b^2}$，代入 $y=-3x+3c$ 中得 $M$ 点的纵坐标为 $\frac{-3b^2c}{9a^2-b^2}$，又 $F_1(-c,0)$，所以 $k_{MF_1}=\frac{\frac{-3b^2c}{9a^2-b^2}}{\frac{9a^2c}{9a^2-b^2}+c}=\frac{b}{a}$，整理得 $18a^2+3ab-b^2=0$，得 $b=6a$，$c=\sqrt{37}a$，所以 $e=\sqrt{37}$.

17.【解析】(Ⅰ)当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{3}{2}(a_1-1)=a_1$，得 $a_1=3$，

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $S_n=\frac{3}{2}(a_n-1)$，得 $S_{n-1}=\frac{3}{2}(a_{n-1}-1)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}(a_n-1)-\frac{3}{2}(a_{n-1}-1)$，整理得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$，

所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，且公比为 3，$a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$，

$b_n+1=2\log_3 3^n=2n$，$b_n=2n-1$. …………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)因为 $c_n$ 是 $a_n$ 与 $b_n$ 的等比中项，所以 $c_n^2=(2n-1)3^n$，

$T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-5)\times 3^{n-2}+(2n-3)\times 3^{n-1}+(2n-1)\times 3^n$ ①，

则 $3T_n=1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-5)\times 3^{n-1}+(2n-3)\times 3^n+(2n-1)\times 3^{n+1}$ ②，

①－②可得：$-2T_n=3+2(3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}+3^n)-(2n-1)\times 3^{n+1}$

$=3+2\times\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\times 3^{n+1}=-6-(2n-2)\times 3^{n+1}$，

所以 $T_n=3+(n-1)\times3^{n+1}$. …………………………………………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)由已知中的频率分布直方图,可知:

$20(0.0020+0.0025+0.0060+0.0120+m+0.0150)=1$,得 $m=0.0125$,

前四组($CO_2$ 排放在区间$[0,80)$内)的累积频率为:$(0.0020+0.0060+0.0120+0.0150)\times20=0.7$,

故若该市计划让全市 70%的企业在"阶梯税费"出台前后缴纳的税费不变,

得临界值 $a=80$. …………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)在(Ⅰ)的条件下,月 $CO_2$ 排放未达 $a$ 吨的企业月 $CO_2$ 排放保持不变;

故 $CO_2$ 排放在区间$[0,80)$内的企业减少 0 吨;

$CO_2$ 排放在区间$[80,100)$内的 25 家企业,平均每家排放 90 吨,超出部分为 10 吨,

根据题意每家减少 6 吨,共 $6\times25=150$ 吨;

$CO_2$ 排放在区间$[100,120)$内的 5 家企业,平均每家排放 110 吨,超出部分为 30 吨,

根据题意每家减少 18 吨,共 $18\times5=90$ 吨;

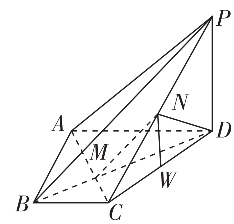
故样本的 100 家企业共减少 $150+90=240$ 吨,

用样本估计总体,估计全市每月减少 $CO_2$ 的排放量为 $240\times\dfrac{1000}{100}=2400$ 吨. …………………… 10 分

(Ⅲ)根据题意,估计全市企业的 $CO_2$ 的月排放量(同一组数据用该区间的中点值作代表)为

$1000\times(10\times0.04+30\times0.12+50\times0.24+70\times0.30+90\times0.25+110\times0.05)=65000$. ……………… 12 分

19.【解析】(Ⅰ)证明:由题意知底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形,$BC\parallel AD$,$AB\perp BC$,




所以 $AC=\sqrt{2}$,$DC=\sqrt{2}$.

因为 $AD=2$,所以由勾股定理得 $AC\perp CD$,

因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PD\perp AC$,

因为 $PD\cap CD=D$,所以 $AC\perp$平面 $PCD$,

因为 $ND\subset$平面 $PCD$,所以 $AC\perp ND$. …………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由 $BC\parallel AD$,$BC=\dfrac{1}{2}AD$,得$\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{1}{2}$,

因为 $MN\parallel$平面 $ABP$,

所以 $MN\parallel AP$,所以$\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{CN}{NP}=\dfrac{1}{2}$,

作 $NW\perp$平面 $ABCD$,垂足 $W$ 在 $CD$ 上,

因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,

所以 $PD\parallel NW$,所以$\dfrac{NW}{PD}=\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{1}{3}$,

即 $NW=\dfrac{1}{3}PD=\dfrac{a}{3}$,

因为 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times AD\times1=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$,

所以三棱锥 $N-ACD$ 的体积为$=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{9}$,得 $a=2$.

因为 $AC=\sqrt{2}$,$PC=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$,所以 $NC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

由(Ⅰ)得 $NC\perp AC$,

所以 $AN=\sqrt{2+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)设 $c=\sqrt{a^2-b^2}$,由题意,得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $a=\sqrt{2}c$,$b=c$,则椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$,

又点 $P(\sqrt{2},1)$在椭圆上，所以$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}=1$，$c^2=2$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由题意知，直线 $l$ 斜率存在，右焦点 $F(\sqrt{2},0)$，

设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} y=k(x-\sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$，消去 $y$ 得$(1+2k^2)x^2-4\sqrt{2}k^2x+4k^2-4=0$，

由题意知可知 $\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{4\sqrt{2}k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+2k^2}$，

所以直线 $PA$ 的斜率为 $k_{PA}=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}$，直线 $PB$ 的斜率为 $k_{PB}=\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}$，

所以 $t=k_{PA}\times k_{PB}\times k=k\times\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}\times\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}$

$=k\times\frac{[k(x_1-\sqrt{2})-1]\times[k(x_2-\sqrt{2})-1]}{x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2}$

$=k\times\frac{k^2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]-k(x_1+x_2-2\sqrt{2})+1}{x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2}$

$=[k^2-\frac{k(x_1+x_2-2\sqrt{2})-1}{x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2}]\times k=(-\sqrt{2}k-\frac{1}{2})k=-\sqrt{2}k^2-\frac{1}{2}k$，

即 $t=-\sqrt{2}k^2-\frac{1}{2}k=-\sqrt{2}(k+\frac{1}{4\sqrt{2}})^2+\frac{\sqrt{2}}{32}$，

所以当 $k=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$时，$t_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{32}$. ……………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)$F(x)=(x-a)\ln x-x+a(x>0)$

当 $a=0$ 时，$F(x)=x\ln x-x$，$F'(x)=\ln x$，

令 $F'(x)>0$，得 $x>1$，$F'(x)<0$，得 $x<1$，

所以 $F(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,+\infty)$. ……………………………………… 4 分

(Ⅱ)令 $H(x)=(x-1)^2-k\ln x$，则 $H'(x)=\frac{2x(x-1)-k}{x}$，

因为 $x>1$，所以 $2x^2-2x=2x(x-1)>0$，

当 $k\leqslant0$ 时，$H'(x)>0$，所以 $H(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数，$H(x)>H(1)=0$，满足题意；

当 $k>0$ 时，令 $H'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1+2k}}{2}<0$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1+2k}}{2}>1$，

所以 $H(x)$在$(1,x_2)$上是减函数，当 $x\in(1,x_2)$时，$H(x)<H(1)=0$，不满足题意，舍去；

综上可得，$k\leqslant0$. ……………………………………………………………………………………………… 8 分

(Ⅲ)$F(x)=(x-a)\ln x-x+a$，$F'(x)=\ln x-\frac{a}{x}=\frac{x\ln x-a}{x}$，

设 $s(x)=x\ln x-a$，则 $s'(x)=\ln x+1$，

令 $s'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$，$s'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{e}$，

所以 $s(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，$s(x)$在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增，$s(x)_{\min}=s(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}-a$，

$F'(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}-ae=-1-ae$，

$F'(e^{-2})=-2-ae^2$，$F'(e^2)=2-\frac{a}{e^2}=\frac{1}{e^2}(2e^2-a)$，

若 $a\leqslant-\frac{1}{e}$，则 $F'(x)=\ln x-\frac{a}{x}\geqslant0$，故 $F(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 内没有极值点；

若 $-\frac{1}{e}<a<-\frac{1}{e^2}$，则 $F'(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}-ae<0$，$F'(e^{-2})=-2-ae^2>0$，$F'(e^2)=2-\frac{a}{e^2}=\frac{1}{e^2}(2e^2-a)>0$，

因此 $F'(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 有两个零点，$F(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 有两个极值点；

若 $-\frac{1}{e^2}\leqslant a<0$，则 $F'(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}-ae<0$，$F'(e^{-2})=-2-ae^2\leqslant0$，$F'(e^2)=2-\frac{a}{e^2}=\frac{1}{e^2}(2e^2-a)>0$，

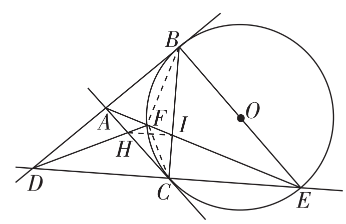
因此 $F'(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 有一个零点，$F(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 有一个极值点；

综上所述，当 $a\leqslant-\frac{1}{e}$ 时，$F(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 内没有极值点；

当 $-\frac{1}{e}<a<-\frac{1}{e^2}$ 时，$F(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 内有两个极值点；

若 $-\frac{1}{e^2}\leqslant a<0$，$F(x)$ 在 $(e^{-2},e^2)$ 有一个极值点. …………………………………………………………… 12 分

22.【解析】证明：(Ⅰ)连接 $CF$，由已知，在△$BCD$ 中，$DA=AB=AC$，




所以∠$BCD$=∠$BCE$=90°，

所以 $BE$ 是⊙$O$ 的直径，

因为∠$CBE$+∠$DBC$=90°，∠$BDC$+∠$DBC$=90°，

所以∠$CBE$=∠$BDC$，

因为∠$CBE$=∠$CFE$，所以∠$BDC$=∠$CFE$，

所以 $A$、$D$、$C$、$F$ 四点共圆，

所以 $AH\cdot HC=DH\cdot HF$. ………………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)连接 $HI$，$BF$，由(Ⅰ)知 $A$、$D$、$C$、$F$ 四点共圆，

得∠$ADF$=∠$ACF$=∠$FBC$，

因为 $AC$ 是⊙$O$ 的切线，所以∠$ACF$=∠$CEF$，

因为 $HI\parallel DE$，所以∠$CEF$=∠$HIF$=∠$HCF$，

所以 $H$、$C$、$I$、$F$ 四点共圆，

所以∠$HDC$=∠$FHI$=∠$FCI$=∠$ABF$，

所以∠$ADC$=∠$DBC$=∠$CBE$，

又 $BC\perp DE$，△$BED$ 为等腰直角三角形. ……………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，$C_1$ 的普通方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，$C_2$ 的普通方程为 $x^2+y^2=1$，

联立方程组 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\x^2+y^2=1\end{cases}$，解得 $C_1$ 与 $C_2$ 的交点为 $(1,0)$，$(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$. ……………………………… 4 分

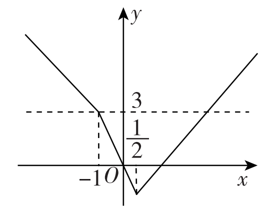
(Ⅱ)$C_1$ 的普通方程为 $x\sin\alpha-y\cos\alpha-\sin\alpha=0$，$A$ 点坐标为 $(\sin^2\alpha,-\cos\alpha\sin\alpha)$，

故当 $\alpha$ 变化时，$P$ 点轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\sin^2\alpha\\y=-\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$ （$\alpha$ 为参数），

即 $\begin{cases}x=\frac{1-\cos2\alpha}{4}\\y=-\frac{1}{4}\sin2\alpha\end{cases}$，由 $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，得 $P$ 点轨迹的普通方程为 $(x-\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{1}{16}$，

故 $P$ 点轨迹是圆心为 $(\frac{1}{4},0)$，半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆. ……………………………………………………………… 10 分

24.【解析】(Ⅰ)$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\geqslant\frac{1}{2}\\ -3x & -1\leqslant x<\frac{1}{2}\\ -x+2 & x<-1\end{cases}$,其图象如图所示.




令 $f(x)=0$ 解得 $x_1=0,x_2=2$,所以 $f(x)<0$ 的解集为$\{x|0<x<2\}$. ……… 5 分

(Ⅱ)如图,当 $x<-1$ 时,$f(x)>3$,要使 $f(x)>f(a)$,需且只需 $f(a)\leqslant3$,

而 $f(a)=3$ 时,有$-3a=3$ 或 $a-2=3$,即 $a=-1$ 或 $a=5$,

由图象得$-1\leqslant a\leqslant5$. …………………………………………………………………… 10 分

## (五)

1. D 【解析】因为 $z=\frac{2+4i}{1-i}=\frac{(2+4i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$,所以 $\bar{z}=-1-3i$,故选 D.

2. B 【解析】由 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{3}{5}$得:$-\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{5}<0$,又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,所以 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,

所以,$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$,所以,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$,所以答案为 B.

3. B 【解析】由题意 $\neg p$:$\forall x\in[\frac{1}{2},1]$,$(x-a)(x-a-1)\leqslant0$,为真.

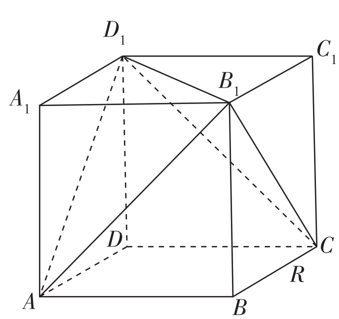
$\because\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$,又$\because(x-a)(x-a-1)\leqslant0\Rightarrow a\leqslant x\leqslant a+1$,$\therefore\begin{cases}a\leqslant\frac{1}{2}\\ a+1\geqslant1\end{cases}$,$\therefore0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,故选 B.

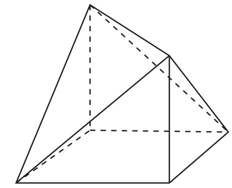
4. D 【解析】因为 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore x\in[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{4}]$,$k\in\mathbf{Z}$,令 $k=0$,$\therefore x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$,令 $k=1$,$x\in[\frac{11}{12}\pi,\frac{5}{4}\pi]$,所以在$[0,\pi]$内,

使 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})\geqslant\frac{1}{2}$的区间为$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{11}{12}\pi,\pi]$,由几何概型的计算公式得 $P=\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$.

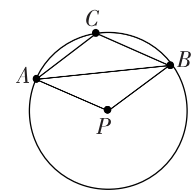
5. C 【解析】根据三视图可知,几何体是一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去两个三棱锥"$A_1-AB_1D_1$ 和 $C_1-CB_1D_1$得到的,如图,当容器中水的体积最小时,也是该几何体体积最大"时,也就是该几何体内接于球时,所以把该几何体补成正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,则正方体内接于球,所以$\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$,$\therefore x=2$.



6. D 【解析】根据对称性,四边形 $AF_1BF_2$ 为平行四边形,又$|AB|=|F_1F_2|$,所以 $AF_1BF_2$ 为矩形,所以 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$,不妨设点 $A$ 在第一象限,则$\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=2a\\ \frac{|AF_2|}{|AF_1|}=\frac{1}{2}\end{cases}$,解得$\begin{cases}|AF_1|=4a\\ |AF_2|=2a\end{cases}$,$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$. $16a^2+4a^2=4c^2$,所以 $5a^2=c^2$,$\frac{b}{a}=2$,所以渐近线方程为 $y=\pm2x$,故选 D.

7. B 【解析】$\because \angle C=120°$，$\therefore \angle APB=120°$，由图可知 $\lambda<0$，$\lambda\overrightarrow{PC}=-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$，设外接圆的半径为 $R$，圆心为 $P$，两边平方可得 $\lambda^2R^2=R^2+R^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\Rightarrow\lambda^2=1+1+2\cos120°$，可得 $\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1\Rightarrow\lambda=-1$.




8. D 【解析】由于 $-2016>0$ 不成立，由框图可知对 $x$ 反复进行加 2 运算，可以得到 $x=2$，进而可得 $y=1$，由于 $1>2015$ 不成立，所以进行 $y=2y$ 循环，最终可得输出结果为 2048.

9. D 【解析】由题意：$\varphi=\frac{\pi}{2}$，$A=\sqrt{3}$，$\omega=\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)=-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}x)$，将 $f(x)$ 向右平移 $\frac{1}{3}$ 个单位得到 $g(x)=-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6})$，$\because \frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore x=2k+\frac{4}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 所以 $x=\frac{4}{3}$ 为 $g(x)$ 图象的一条对称轴方程.

10. B 【解析】$\because S_n=n^2+n$，$\therefore n\geqslant2$，$b_n=S_n-S_{n-1}=2n$，又 $b_1=2$，所以 $b_n=2n$，从而等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项为 $\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$，所以 $q=2$，又 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，$\therefore \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\leqslant\frac{\frac{1}{a_1}[1-(\frac{1}{q})^n]}{1-\frac{1}{q}}$，代入 $q=2$，$\because a_1=\frac{1}{8}$，化简得 $2^{n-1}\leqslant64$，$\therefore n\leqslant7$.

11. B 【解析】由题意知 $2mx-y+3m=0$，$\therefore y=2mx+3m=m(2x+3)$，所以直线 $2mx-y+3m=0$ 恒过定点 $N(-\frac{3}{2},0)$，设 $M(a,b)$，由 $AB$ 的中点为 $(2,7)$，得 $AB$ 中垂线的方程为 $x+2y-16=0$，由题意得 $\begin{cases}a+2b-16=0\\(a-1)^2+(b-5)^2=b^2\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-9\\b=\frac{25}{2}\end{cases}$（舍）即 $M(6,5)$. 设 $P(0,t)$，

则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(6,5-t)\cdot(-\frac{3}{2},-t)=-9-t(5-t)=t^2-5t-9=(t-\frac{5}{2})^2-\frac{61}{4}\geqslant-\frac{61}{4}$.

12. A 【解析】$f'(x)=\frac{[e^x+(x+ac-2)e^x](x+1)-(x+ac-2)e^x}{(x+1)^2}=\frac{[x^2+(ac-1)x+1]e^x}{(x+1)^2}$

依题意得：$f'(1)=\frac{(ac+1)e}{4}=\frac{3}{4}e$，$\therefore ac=2$.

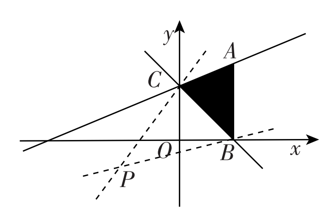
因为 $c>0$，所以 $a>0$，

所以 $\frac{1}{c+2}+\frac{a}{a+2}=\frac{1}{c+2}+\frac{\frac{2}{c}}{\frac{2}{c}+2}=\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+1}=\frac{2(c+\frac{3}{2})}{(c+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}=\frac{2}{c+\frac{3}{2}-\frac{1}{4(c+\frac{3}{2})}}$，

因为 $c>0$，所以 $c+\frac{3}{2}-\frac{1}{4(c+\frac{3}{2})}>\frac{3}{2}-\frac{1}{4\times\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$，所以 $0<\frac{1}{c+2}+\frac{a}{a+2}<\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$.

13. 0 【解析】由题意 $\begin{cases}x_0\leqslant0\\2^{-x_0}-1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0>0\\\sqrt{x_0}=1\end{cases}$，解之得 $x_0=-1$ 或 $x_0=1$，所以零点之和为 0.

14. $[\frac{1}{4},\frac{3}{2}]$ 【解析】根据题意作出不等式组表示的区域是图中所示的阴影部分，即 $\triangle ABC$ 的边界及其内部，又因为 $\frac{y+1}{x+2}$ 表示区域内一点 $(x,y)$ 和点 $(-2,-1)$ 连线的斜率，由图可知 $k_{PB}\leqslant\frac{y+1}{x+2}\leqslant k_{PC}$，根据不等式组解得 $B(2,0)$，$C(0,2)$




所以 $\frac{0+1}{2+2}\leqslant\frac{y+1}{x+2}\leqslant\frac{2+1}{0+2}\Rightarrow\frac{1}{4}\leqslant\frac{y+1}{x+2}\leqslant\frac{3}{2}$.

15. $4\sqrt{2}$【解析】根据题意知，直线 $l$ 的斜率存在，设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+2)$　①

由题意设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1(a^2>4)$ ②

由直线 $l$ 与圆相切得$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得 $k^2=\frac{1}{3}$

将①代入②得$(a^2-3)x^2+a^2x-\frac{3}{4}a^4+4a^2=0$,设点 $M$ 的坐标为$(x_1,y_1)$,点 $N$ 的坐标为$(x_2,y_2)$,由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{a^2}{a^2-3}$又线段 $MN$ 的中点到 $y$ 轴的距离为$\frac{4}{5}$,所以$|x_1+x_2|=\frac{8}{5}$,即$-\frac{a^2}{a^2-3}=-\frac{8}{5}$

解得 $a^2=8$.所以 $2a=4\sqrt{2}$.

16.$\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{10}}-1)$【解析】因为当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^na_n-\frac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}$,整理得

$(1-(-1)^n)a_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}=\frac{1}{2^n}$,所以,当 $n$ 为偶数时,$a_{n-1}=-\frac{1}{2^n}$,

当 $n$ 为奇数时,$2a_n+a_{n-1}=\frac{1}{2^n}$,所以 $a_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$,

所以 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}},n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{2^n},n\text{ 为偶数}\end{cases}$,所以当 $n$ 为偶数时,$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$,

所以 $S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots+S_9+S_{10}=-a_1-\frac{1}{2}+a_2-\frac{1}{2^2}-a_3-\frac{1}{2^3}+\cdots-a_9-\frac{1}{2^9}+a_{10}-\frac{1}{2^{10}}=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{10}-a_9)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{10}})=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^9})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}})=$

$\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4^5})}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{10}})}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2^{10}})-(1-\frac{1}{2^{10}})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{10}}-1)$.

17.【解析】(Ⅰ)$f(x)=2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=\sqrt{3}\sin x+\cos x+1=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+1$. ………………… 2 分

$\therefore T=2\pi$,$f(x)$的最小值为$-1$. ……………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)根据 $2\sin(A+\frac{\pi}{6})+1=3$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$,所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$,$\therefore c=4$, ……………………… 6 分

根据余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=13$,$\therefore a=\sqrt{13}$, ……………………………………… 9 分

根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$,

根据分式的性质,得$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2\sqrt{39}}{3}$. …………………………………………… 12 分

18.【解析】(Ⅰ)在梯形 $ABCD$ 中,

$\because AB/\!/CD,AD=DC=CB=1,\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,

所以梯形 $ABCD$ 为等腰梯形,$\therefore AB=2CD=2$, ………………………………………………… 2 分

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\frac{\pi}{3}=3$,

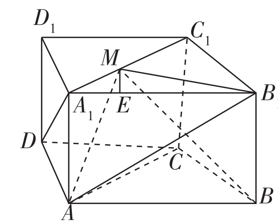
$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$,$\therefore BC\perp AC$, ……………………………………………………………… 4 分

$\because AA_1\perp$平面 $ABCD$,$BC\subset$平面 $ABCD$,

$\therefore AA_1\perp BC$,又$\because AA_1,AC\subset$平面 $A_1ACC_1$ 且 $AA_1\cap AC=A$,

所以 $BC\perp$平面 $A_1ACC_1$. ………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)设 $A_1M=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3})$,过 $M$ 做 $ME$ 垂直 $A_1B_1$ 于 $E$,$\because CC_1\perp$平面 $ABCD$,




∴四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，从而平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，又平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1B_1$，所以 $ME\perp$ 平面 $ABB_1A_1$， ……… 8 分

所以 $ME$ 为 $M$ 到平面 $ABB_1A_1$ 的距离.

因为$\triangle A_1ME\backsim\triangle A_1B_1C_1$，所以$\dfrac{ME}{B_1C_1}=\dfrac{A_1M}{A_1B_1}$，∴$\dfrac{ME}{1}=\dfrac{\lambda}{2}$，∴$ME=\dfrac{\lambda}{2}$， …… 10 分

$V_{B_1-AMB}=V_{M-ABB_1}=\dfrac{1}{3}\times ME\times S_{\triangle ABB_1}=\dfrac{\lambda}{6}\times\dfrac{1}{2}\times1\times2=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$，∴$\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， …… 11 分

从而 $M$ 点为 $A_1C_1$ 的中点. …………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(Ⅰ)100～110 分数段的学生的频率为 $P_1=(0.04+0.03)\times5=0.35$，

所以该班总人数为 $N=\dfrac{21}{0.35}=60$， …………………………………………………………… 2 分

110～115 分数段内人的频率为 $P_2=1-(0.01+0.04+0.05+0.04+0.03+0.01)\times5=0.1$，

110～115 分数段内的人数为 $n=60\times0.1=6$. ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由题意 110～115 分数段内有 6 名学生，其中女生有 2 名，

设男生为 $A_1,A_2,A_3,A_4$，女生为 $B_1,B_2$，从 6 名学生中选出 2 人的基本事件为：

$(A_1,A_2)$，$(A_1,A_3)$，$(A_1,A_4)$，$(A_1,B_1)$，$(A_1,B_2)$，$(A_2,A_3)$，$(A_2,A_4)$，$(A_2,B_1)$，$(A_2,B_2)$，$(A_3,A_4)$，$(A_3,B_1)$，$(A_3,B_2)$，$(A_4,B_1)$，$(A_4,B_2)$，$(B_1,B_2)$共 15 个，其中其中恰好含有一名女生的基本事件为$(A_1,B_1)$，$(A_1,B_2)$，$(A_2,B_1)$，$(A_2,B_2)$，$(A_3,B_1)$，$(A_3,B_2)$，$(A_4,B_1)$，$(A_4,B_2)$，共 8 个，所以所求的概率为

$P=\dfrac{8}{15}$. ………………………………………………………………………………………… 8 分

(Ⅲ)$\bar{x}=100+\dfrac{-12-17+17-8+8+12}{7}=100$；

$\bar{y}=100+\dfrac{-6-9+8-4+4+1+6}{7}=100$；代入方程 $\hat{y}=\hat{b}x+50$，得 $\hat{b}=0.5$.

∴线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+50$.

∴当 $x=130$ 时，$\hat{y}=115$. ………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)由题意 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，所以 $c=1$，同时 $PF_1\perp BF_1$，

又$\dfrac{BF_1}{AB}=\dfrac{PF_1}{AF_2}$，$\angle ABF_2=\angle PBF_1$，所以$\triangle ABF_2\backsim\triangle F_1BP$，从而 $AB\perp AF_2$. ………………… 3 分

由题意 $B(-3c,0)$，$AB=\sqrt{9c^2+b^2}$，$AF_2=a$，$BF_2=4c$，由 $AB\perp AF_2$ 及勾股定理得，$AB^2+AF_2^2=BF_2^2$，

即 $9c^2+b^2+a^2=16c^2$，又 $a^2-b^2=c^2$，所以 $3a^2=4b^2$. ………………………………………… 4 分

所以，$a^2=4$，$b^2=3$，故椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………… 5 分

(Ⅱ)设 $C(x_1,y_1)D(x_2,y_2)$，直线 $CD$ 的方程为 $y=x-t$，

代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，消去 $y$ 得，$7x^2-8tx+4t^2-12=0$，

由 $\Delta>0$，∴$t^2<7$，且 $x_1+x_2=\dfrac{8t}{7}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^2-12}{7}$，

$y_1y_2=(x_1-t)(x_2-t)=x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2=\dfrac{3t^2-12}{7}$，………………………………………… 7 分

设 $N(x,y)$，由$\overrightarrow{ON}=\cos\theta\cdot\overrightarrow{OC}+\sin\theta\cdot\overrightarrow{OD}$

可得$\begin{cases}x=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\\y=y_1\cos\theta+y_2\sin\theta\end{cases}$，因为点 $N(x,y)$在椭圆上，所以

$$\begin{aligned}12&=3x^2+4y^2=3(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)^2+4(y_1\cos\theta+y_2\sin\theta)^2\\&=(3x_1^2+4y_1^2)\cos^2\theta+(3x_2^2+4y_2^2)\sin^2\theta+6x_1x_2\cos\theta\sin\theta+8y_1y_2\cos\theta\sin\theta\\&=12(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+2\cos\theta\sin\theta(3x_1x_2+4y_1y_2)\\&=12+2\cos\theta\sin\theta(3x_1x_2+4y_1y_2)\end{aligned}$$
……………………………………………………………………………………………………… 10 分

又因为 $\theta\in[0,2\pi]$ 的任意性，所以 $3x_1x_2+4y_1y_2=0$，

从而 $3\times\frac{4t^2-12}{7}+4\times\frac{3t^2-12}{7}=0$，$\therefore t^2=\frac{7}{2}$，$\therefore t=\frac{\sqrt{14}}{2}$，代入 $t^2<7$ 检验，满足条件，

故 $t$ 的值为 $\frac{\sqrt{14}}{2}$. ………………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $f'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}(x>0$，且 $x\neq 1)$， ………………………………………… 1 分

设 $h(x)=x-1-\ln x$，$h'(x)=1-\frac{1}{x}$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，$h(x)$ 是增函数，$h(x)>h(1)=0$，$f'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，

故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)=1-\frac{1}{x}<0$，$h(x)$ 是减函数，

$h(x)>h(1)=0$，$f'(x)=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$. ………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)要证 $\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{m}$，即证 $\frac{\ln n}{m}-\frac{\ln m}{n}>\ln n-\ln m$，即证 $\frac{(n-1)\ln m}{n}>\frac{(m-1)\ln n}{m}$， ……………………… 5 分

即证 $\frac{m\ln m}{m-1}>\frac{n\ln n}{n-1}$，即证 $f(m)>f(n)$，又 $m>n>1$，由(Ⅰ)知，$f(m)>f(n)$，所以 $\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}}>\frac{n}{m}$. …………… 7 分

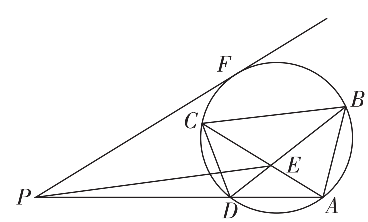
(Ⅲ)由已知设 $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0,+\infty)$ 等价于 $g(x)<(1+e^{-2})$，……………… 8 分

设 $p(x)=1-x-x\ln x$，$p'(x)=-2-\ln x=-(\ln x-\ln e^{-2})$，$x\in(0,+\infty)$，易证 $x\in(0,e^{-2})$ 时，$p'(x)>0$，
即 $p(x)$ 单调递增；$x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$p'(x)<0$，即 $p(x)$ 单调递减，
所以 $p(x)$ 的最大值为 $p(e^{-2})=1+e^{-2}$，故 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$，……………………………………… 10 分

同时由(Ⅰ)知 $\ln x<x-1$，所以 $\ln(x+1)<x$，$\therefore 0<\frac{\ln(x+1)}{x}<1$，所以 $\frac{\ln(x+1)}{x}(1-x-x\ln x)<1+e^{-2}$，

故 $(1-x)[1+f(x)]f(x+1)<(x+1)(1+e^{-2})$. …………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)如图，因为 $\angle DAE=\angle CBE$，$\angle ADE=\angle BCE$，




所以 $\triangle AED\backsim\triangle BEC$，所以 $\frac{AD}{BC}=\frac{DE}{CE}$， ………………………………… 2 分

同理可证：$\triangle DEC\backsim\triangle AEB$，所以 $\frac{DC}{AB}=\frac{DE}{AE}$，

而 $AE=CE$，所以 $\frac{AD}{BC}=\frac{DC}{AB}$. ……………………………………………… 5 分

(Ⅱ)因为 $BC/\!/PE$，所以 $\angle CBD=\angle PED$，且 $\angle CBD=\angle CAD\Rightarrow\angle PED=\angle CAD$，

$\therefore\triangle EPD\backsim\triangle APE\Rightarrow\frac{PE}{PA}=\frac{PD}{PE}\Rightarrow PE^2=PA\cdot PD$. ………………………………………………… 8 分

根据切线定理，得 $PF^2=PA\cdot PD$，所以 $PE=PF$. ……………………………………………………… 10 分

23.【解析】(Ⅰ)因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，所以曲线 $C$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=8x-8$，
所以 $(x-4)^2+y^2=8$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由 $\begin{cases}x=2-t\\y=mt\end{cases}$，代入 $(x-4)^2+y^2=8$，得 $(-t-2)^2+(mt)^2=8$，得 $(m^2+1)t^2+4t-4=0$，

$\therefore t_1+t_2=-\frac{4}{m^2+1}$，$t_1t_2=\frac{-4}{m^2+1}$，………………………………………………………………… 8 分

所以 $|AB|=\sqrt{(-t_1+t_2)^2+(mt_1-mt_2)^2}=\sqrt{1+m^2}\,|t_1-t_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$，

代入可得 $|AB|=4\sqrt{\frac{1}{m^2+1}+1}$，又 $m^2+1\geqslant 1$，所以 $|AB|\in(4,4\sqrt{2}]$. …………………………… 10 分

24.【解析】(Ⅰ)当 $x<-2$ 时,$f(x)-|x+2|=1-2x+x+2=-x+3$,

$f(x)-|x+2|>x-1$,即 $-x+3>x-1$,解得 $x<2$,又 $x<-2$,$\therefore x<-2$; …………………………… 2 分

当 $-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$f(x)-|x+2|=1-2x-x-2=-3x-1$,

$f(x)-|x+2|>x-1$,即 $-3x-1>x-1$,

解得 $x<0$,又 $-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,$\therefore -2\leqslant x<0$;…………………………………………………… 4 分

当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f(x)-|x+2|=2x-1-x-2=x-3$,

$f(x)-|x+2|>x-1$,即 $x-3>x-1$,不等式无解.

综上,不等式 $f(x)-|x+2|>x-1$ 的解集为 $(-\infty,0)$. …………………………………………… 5 分

(Ⅱ)当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$ 时,$f(x)+|2x+a|=|2x-1|+|2x+a|=1+a$,

不等式 $f(x)+|2x+a|\leqslant x+3$ 化为 $1+a\leqslant x+3$,……………………………………………… 8 分

所以 $x\geqslant a-2$ 对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}]$ 恒成立,故 $-\frac{a}{2}\geqslant a-2$,即 $a\leqslant\frac{4}{3}$,

从而 $a$ 的取值范围为 $(-1,\frac{4}{3}]$. ……………………………………………………………… 10 分

## (六)

1. D 【解析】因为 $A=\{x\mid x^2-2016x<0\}=(0,2016)$,$B=[-2014,2016]$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,0]\cup[2016,+\infty)$,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=[-2014,0]\cup\{2016\}$.

2. A 【解析】因为 $z=\frac{i}{3+4i}=\frac{i(3-4i)}{25}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$,复数 $z$ 在复平面内对应的点为 $(\frac{4}{25},\frac{3}{25})$ 在第一象限内,所以命题 $p$ 是真命题;因为当 $x=3$ 时,$2^3<3^2$,所以命题 $q$ 是假命题;根据真值表得,$p\wedge(\neg q)$ 是真命题.

3. A 【解析】根据频率分布表,$x=1-(0.1+0.2+0.4)$,$\therefore x=0.3$,此时间段内超速的汽车有:$30=(0.4+0.2)\times n$,$\therefore n=50$.

4. D 【解析】$\because 2S_n=4a_n-1$,$2S_{n-1}=4a_{n-1}-1$,$\therefore 2a_n=4a_n-4a_{n-1}$,$\therefore a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$,

又 $2a_1=4a_1-1$,$\therefore a_1=\frac{1}{2}$,所以数列 $\{a_n\}$ 为 $a_1=\frac{1}{2}$,$q=2$ 的等比数列,

所以 $a_n=2^{n-2}$,$T_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=2^{-1+0+1+\cdots+(n-3)+(n-2)}=2^{\frac{n(n-3)}{2}}$.

5. C 【解析】$\because f(\frac{1}{2})=3\times(t-1)^{\frac{1}{2}}=6$,即 $(t-1)^{\frac{1}{2}}=2$,解得 $t=5$.

故 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+5),x<0\\3\times4^x,\quad x\geqslant0\end{cases}$.

当 $x<0$ 时,$\log_2(x^2+5)>3$,$\therefore x^2+5>8$,$\therefore x^2>3$,$\therefore x>\sqrt{3}$ 或 $x<-\sqrt{3}$,所以 $x<-\sqrt{3}$;

当 $x\geqslant0$ 时,$3\times4^x>3$,$\therefore 4^x>1$,$\therefore x>0$,所以 $x>0$.

故不等式 $f(x)>3$ 的解集为 $\{x|x>0$ 或 $x<-\sqrt{3}\}$.

6. A 【解析】所求体积是球去掉 2 个 $\frac{1}{8}$ 球余下部分的体积,即体积为 $\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}\times2=\pi$.

7. C 【解析】因为 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\tan(\alpha+\beta-\beta+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}=\frac{-\frac{11}{7}-\frac{1}{4}}{1-\frac{11}{7}\times\frac{1}{4}}=-3$,所以 $\tan\alpha=$

$\tan[(\alpha+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{4})]=\frac{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-3-1}{1+(-3)\times1}=2$,又 $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+2}{\tan^2\alpha+1}$

$=\dfrac{6}{5}$.

8. C 【解析】因为$\dfrac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}=\sqrt{i+1}-\sqrt{i}$，所以 $S=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})=\sqrt{i+1}-1$，即 $\sqrt{i+1}-1=10$，解得 $i=120$. 故判断框内的 $n=121$.

9. C 【解析】根据题意，直线 $l:ax+\dfrac{y}{2}=1$ 经过圆$(x+1)^2+y^2=1$ 的圆心，所以 $a=-1$，从而 $P(x,y)$到直线的距离为$\dfrac{\left|-x+\dfrac{y}{2}-1\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{\left|-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{y}{2}-1\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{|y^2-2y+4|}{4\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}}=\dfrac{|(y-1)^2+3|}{4\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}}\geqslant\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

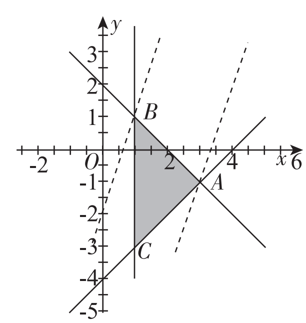
10. C 【解析】由题意，$x\in[0,2\pi]$，$f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}-1=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\cos x-1=4\cos^2x-1=2\cos2x+1$. 所以 $f(x)$的单调增区间为$[\dfrac{\pi}{2},\pi]$和$[\dfrac{3\pi}{2},2\pi]$.

11. A 【解析】因为 $PF_1$ 所在直线与圆$(x-c)^2+y^2=c^2$ 相切，所以 $\sin\angle PF_1F_2=\dfrac{c}{|F_1F_2|}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle PF_1F_2=\dfrac{\pi}{6}$；由题意可知$|PF_2|=|F_1F_2|$，所以$|PF_1|=\sqrt{3}|F_1F_2|=2\sqrt{3}c$，从而$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{3}c-2c=2a$，$\therefore\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，故该双曲线的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

12. B 【解析】由题设，$f(x)=e^x$ 的反函数为 $g(x)=\ln x$，设 $g(x)=\ln x$ 的图象的切线的斜率为 $k$，切点坐标为$(x_0,y_0)$，由题意可得切线的斜率 $k=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{\ln x_0}{x_0}$，根据导数的几何意义 $k=\dfrac{1}{x_0}$，所以$\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$\therefore x_0=e$，由 $\theta$ 的几何意义得 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{k}=x_0=e$，所以 $\sin\theta=e\cos\theta$，选 B.

13. $\dfrac{1}{2}$ 【解析】由题意椭圆的 $b=c=1$，$a=\sqrt{2}$，$\therefore\triangle PF_1F_2$ 为以 $P$ 为直角顶点的等腰直角三角形，当 $D$ 点在线段 $OF_2$ 上时，$\triangle PF_1D$ 为锐角三角形，所以$\triangle PF_1D$ 为锐角三角形的概率为$\dfrac{1}{2}$.

14. 9 【解析】如图阴影部分为约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant2\\x-y\leqslant4\\x\geqslant1\end{cases}$的可行域，经计算点 $A(3,-1)$，$B(1,1)$，设 $t=y-3x$，$\therefore y=3x+t$，当 $y=3x+t$ 经过 $B$ 点时，截距 $t$ 取最大值 $-2$，所以 $z=y-3x+11$ 的最大值为 9.




15. $\sqrt{13}$ 【解析】$\because x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$，$\therefore x^2\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$，
$\therefore\overrightarrow{OC}=-x^2\overrightarrow{OA}-(x-1)\overrightarrow{OB}$，因为 $A,B,C$ 三点共线，所以$-x^2-(x-1)=1$，
$\therefore x=0$ 或$-1$，当 $x=0$ 时，$\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$ 与题意不符，所以 $x=-1$，
$\therefore\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=(-1,0)+2(2,1)=(3,2)$，$\therefore|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{13}$.

16. 9 【解析】由 $a_{n+1}-a_n=-2(n\geqslant2)$，当 $n\geqslant2$ 时，数列 $a_2,a_3,\cdots a_n,\cdots$构成等差数列，$a_n=\begin{cases}-2n+14,n\geqslant2\\-\dfrac{85}{4},n=1\end{cases}$，所以 $S_n=-\dfrac{85}{4}+\dfrac{(n-1)(-2n+14+10)}{2}=-n^2+13n-\dfrac{133}{4}$，易知当 $n\leqslant6$ 时，$\{S_n\}$是递增的，当 $n>6$ 时，$\{S_n\}$是递减的，所以 $S_1<S_2<S_3<0<S_4<S_5<S_6=S_7>S_8>S_9>0>S_{10}>\cdots$，所以 $S_1S_2S_3<0$，$S_2S_3S_4>0$，$S_3S_4S_5<0$，$S_4S_5S_6>0\cdots$，$S_7S_8S_9>0$，$S_8S_9S_{10}<0$，$S_9S_{10}S_{11}>0$，$S_{10}S_{11}S_{12}<0$，且只要 $n\geqslant10$ 时，$S_nS_{n+1}S_{n+2}<0$，记 $S_1S_2S_3+S_2S_3S_4+S_3S_4S_5+\cdots+S_nS_{n+1}S_{n+2}$为 $T_n$，则 $T_1<T_2<\cdots T_7$，$T_8=T_7+S_8S_9S_{10}<T_7$，$T_9=T_7+S_8S_9S_{10}+S_9S_{10}S_{11}>T_7$，$T_{10}=T_9+S_{10}S_{11}S_{12}<T_9$，当 $n\geqslant9$ 时，$T_9>T_{10}>\cdots$，故当 $S_1S_2S_3+S_2S_3S_4+$

$S_3S_4S_5+\cdots+S_nS_{n+1}S_{n+2}$取得最大值时，$n$的值为9.

17.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=\cos^2(\frac{2015}{3}\pi+x)-\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\frac{1+\cos(\frac{2}{3}\pi-2x)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，………………… 4分

因为$-1\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant1$，所以 $0\leqslant f(x)\leqslant1$，所以 $f(x)$的值域为$[0,1]$. ………………………………… 6分

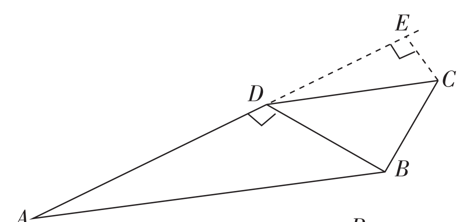
(Ⅱ)由 $f(C)=0$，∴$\sin(2C+\frac{\pi}{6})=1$，$c=1$，$ab=2\sqrt{3}$，$a>b$，所以 $c$ 不是最大边，

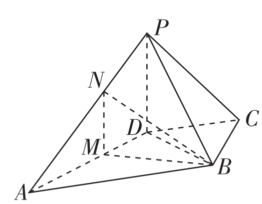
故 $0<C<\frac{\pi}{2}$，∴$C=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………………………… 8分

在△$ABC$ 中，由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得 $a^2+b^2=7$， ……………………………………………… 10分

解$\begin{cases}a^2+b^2=7\\ab=2\sqrt{3}\end{cases}$，得$\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=\sqrt{3}\\b=2\end{cases}$(舍)，∴$a=2$，$b=\sqrt{3}$. ………………………………………… 12分

18.【解析】(Ⅰ)由 $PD=4$，$DB=3$，$PB=5$ 可得 $PD^2+DB^2=PB^2$，∴$PD\perp DB$，同理可得：$PD\perp DC$.
而 $DB\cap DC=D$，$DB$，$DC\subset$平面 $ABCD$，∴$PD\perp$平面 $ABCD$，而 $AD\subset$平面 $ABCD$，
∴$AD\perp PD$，…………………………………………………………………………………………………… 3分
又 $AD\perp DB$，且 $PD\cap BD=D$，$PD$，$BD\subset$平面 $PBD$，∴$AD\perp$平面 $PBD$，
又 $PB\subset$平面 $PBD$，∴$AD\perp PB$， ……………………………………………………………………… 4分
(Ⅱ)如图所示，过 $C$ 作 $CE\perp AD$，




结合 $\tan\angle ADC=-\frac{4}{3}$，可得 $\tan\angle CDE=\frac{4}{3}$. 过点 $B$ 作 $BM\parallel CD$，
交 $AD$ 于$M$，过点 $M$ 作$MN\parallel PD$，交 $PA$ 于 $N$，连接 $NB$， … 8分
∵$BM\parallel CD$，∴$BM\not\subset$平面 $PCD$，∴$BM\parallel$平面 $PCD$，
又∵$MN\parallel PD$，∴$MN\not\subset$平面 $PCD$，∴$MN\parallel$平面 $PCD$，
又 $MN\cap BM=M$，所以平面 $BMN\parallel$平面 $PCD$，平面 $BMN$ 即为平面$\alpha$. …… 10分
则△$BMN$ 的周长即为平面$\alpha$ 与该几何体各表面的交线的长度之和.
因为 $BM\parallel CD$，所以$\angle CDE=\angle BMD$，

所以 $\tan\angle BMD=\frac{4}{3}$，∴$MD=\frac{BD}{\tan\angle BMD}=\frac{3}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{4}$，所以 $BM=\sqrt{MD^2+BD^2}=\frac{15}{4}$，

同时 $AM=AD-MD=\frac{15}{4}$，∵$MN\parallel PD$，∴$\frac{MN}{PD}=\frac{AM}{AD}$，∴$MN=\frac{5}{2}$，

又 $MN\perp BM$，所以由勾股定理得 $BN=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，

所以平面$\alpha$ 与该几何体各表面的交线的长度之和为$\frac{15}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{4}=\frac{5(5+\sqrt{13})}{4}$. ………………… 12分

19.【解析】(Ⅰ)根据分层抽样的定义，检测的甲的数量为$\frac{30}{80}\times8=3$，检测的乙的数量为$\frac{50}{80}\times8=5$. ……… 2分

(Ⅱ)设 3 件甲服装为 $a_1,a_2,a_3$，5 件甲服装为 $b_1,b_2,b_3,b_4,b_5$，所以从 8 件服装中购买了其中的 2 件的基本事件有$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,b_1\}$，$\{a_1,b_2\}$，$\{a_1,b_3\}$，$\{a_1,b_4\}$，$\{a_1,b_5\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_2,b_1\}$，$\{a_2,b_2\}$，$\{a_2,b_3\}$，$\{a_2,b_4\}$，$\{a_2,b_5\}$，$\{a_3,b_1\}$，$\{a_3,b_2\}$，$\{a_3,b_3\}$，$\{a_3,b_4\}$，$\{a_3,b_5\}$$\{b_1,b_2\}$，$\{b_1,b_3\}$，$\{b_1,b_4\}$，$\{b_1,b_5\}$，$\{b_2,b_3\}$，$\{b_2,b_4\}$，$\{b_2,b_5\}$$\{b_3,b_4\}$，$\{b_3,b_5\}$，$\{b_4,b_5\}$共 28 个，根据题意网店这两件的利润不高于 1100 元的情况为两件甲或一件甲和一件乙，其中利润不高于 1100 元的基本事件为$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,b_1\}$，$\{a_1,b_2\}$，$\{a_1,b_3\}$，

$\{a_1,b_4\},\{a_1,b_5\},\{a_2,a_3\},\{a_2,b_1\},\{a_2,b_2\},\{a_2,b_3\},\{a_2,b_4\},\{a_2,b_5\},\{a_3,b_1\},\{a_3,b_2\},\{a_3,b_3\},\{a_3,b_4\}$,

$\{a_3,b_5\}$共 18 个,所以满足条件的概率为 $P=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$. …… 8 分

(Ⅲ)把 $\bar{x}=5,\bar{y}=50$ 代入 $\hat{y}=6.5x+\hat{a}$,得 $\hat{a}=17.5$,所以 $\hat{y}=6.5x+17.5$,所以当 $x=10,\hat{y}=82.5$.当店员的薪酬为 10 时的销售额为 82.5. …… 12 分

20.【解析】(Ⅰ)由题意 $PF_1,PF_2$,分别为$\triangle AMN,\triangle BMN$ 的中位线,所以$|AN|+|BN|=2(|PF_1|+|PF_2|)=4a=8$,$\therefore a=2$, …… 2 分

又抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点到准线的距离为 2,所以 $p=2$,又抛物线 $y^2=4x$ 的准线经过 $F_1$,$\therefore c=1$,

$\therefore b=\sqrt{3}$,所以椭圆 $C$ 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 4 分

(Ⅱ)根据题意,点 $F_2(1,0)$,设直线 $l$ 的方程为:$y=k(x-1)$,$E(x_1,y_1)$,$G(x_2,y_2)$代入椭圆方程整理可得:

$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,得 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$, …… 6 分

直线 $DE$:$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$,所以点 $F(4,\frac{2y_1}{x_1-2})$,同理 $Q(4,\frac{2y_2}{x_2-2})$,

从而 $H(4,\frac{1}{2}(\frac{2y_1}{x_1-2}+\frac{2y_2}{x_2-2}))$, …… 8 分

设 $F_2H$ 的斜率为$k'$,则

$$k'=\frac{\frac{1}{2}(\frac{2y_1}{x_1-2}+\frac{2y_2}{x_2-2})}{3}=\frac{1}{3}(\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2})=\frac{1}{3}k(\frac{x_1-1}{x_1-2}+\frac{x_2-1}{x_2-2})$$

$$=\frac{1}{3}k(\frac{(x_1-1)(x_2-2)+(x_1-2)(x_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)})=\frac{1}{3}k\cdot\frac{2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{1}{3}k\cdot(-\frac{12}{4k^2})=-\frac{1}{k},$$

$\therefore k'k=-1$,所以,$F_2H\perp EG$. …… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)$\because f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+1$,$\therefore f'(x)=x^2-ax$,若直线 $x+y+m=0$ 对任意的 $m\in\mathbf{R}$ 都不是曲线 $y=f(x)$的切线,则 $f'(x)=x^2-ax\neq-1$,所以 $f'(x)$的最小值大于$-1$, …… 2 分

$\because f'(x)=x^2-ax=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}\geqslant-\frac{a^2}{4}$,所以$-\frac{a^2}{4}>-1$,$\therefore a^2<4$,$\therefore a\in(-2,2)$. …… 3 分

(Ⅱ)$\because F(x)=g(x)-x=b\ln x-x$,$\therefore F'(x)=\frac{b}{x}-1=\frac{b-x}{x}(x>0)$, …… 5 分

当 $b\leqslant0$ 时,$F'(x)<0$,函数 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,函数无极值,

当 $b>0$ 时,$F'(x)=0$,$\therefore x=b$,$x\in(0,b)$时,$F'(x)>0$,函数 $F(x)$在$(0,b)$上单调递增,$x\in(b,+\infty)$时,$F'(x)<0$,函数 $F(x)$在$(b,+\infty)$上单调递减,函数 $F(x)$在 $x=b$ 处有极大值,极大值为 $F(b)=b\ln b-b$,无极小值,

综上,当 $b\leqslant0$ 时,函数无极值;当 $b>0$ 时,函数 $F(x)$有极大值 $F(b)=b\ln b-b$,无极小值. …… 7 分

(Ⅲ)由 $f'(x)+g(x)\geqslant2x$,得$(x-\ln x)a\leqslant x^2-2x$, …… 8 分

$\because x\in[1,\mathrm{e}]$,$\therefore\ln x\leqslant1\leqslant x$,且等号不能同时取,$\therefore\ln x<x$,即 $x-\ln x>0$,

$\therefore a\leqslant\frac{x^2-2x}{x-\ln x}$恒成立,即 $a\leqslant(\frac{x^2-2x}{x-\ln x})_{\min}$, …… 10 分

令 $t(x)=\frac{x^2-2x}{x-\ln x}(x\in[1,\mathrm{e}])$,求导得 $t'(x)=\frac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$,

当 $x\in[1,\mathrm{e}]$时,$x-1\geqslant0$,$0\leqslant\ln x\leqslant1$,$x+2-2\ln x>0$,从而 $t'(x)\geqslant0$,

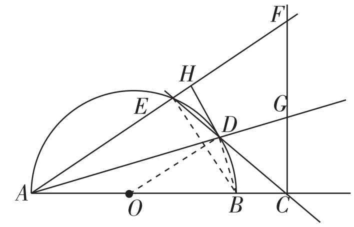
$\therefore t(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上是增函数,$\therefore t_{\min}(x)=t(1)=-1$,

$\therefore a\leqslant-1$,所以实数 $a$ 的最大值$-1$. …… 12 分

22.【解析】证明:(Ⅰ)连接 $EB$,因为 $AB$ 为半圆 $O$ 的直径,所以$\angle AEB=90^\circ$,$\angle ADB=90^\circ$,在 Rt$\triangle AEB$ 和

Rt△$ACF$中，$\angle ABE=\angle AFC$，又$\angle ABE=\angle ADE$，∴$\angle ADE=\angle AFC$，所以 $D,E,F,G$ 四点共圆. ……………………………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)连接 $OD$，因为 $OA=OD$，所以$\angle OAD=\angle ODA$，




因为 $DH$ 为半圆的切线，所以 $OD\perp DH$，又 $AH\perp DH$，所以 $OD/\!/AH$，

所以$\angle ODA=\angle DAH$，$\angle OAD=\angle DAH$，所以 $BD=ED$，…………… 8分

又因为 $A,B,D,E$ 四点共圆，$DH$ 为半圆的切线，

所以$\angle DAB=\angle EAD=\angle EDH$，

又$\angle ADB=90°$，所以 Rt△$ADB\backsim$Rt△$DHE$，

所以$\dfrac{EH}{ED}=\dfrac{BD}{AB}$，∴$ED\cdot BD=EH\cdot AB$，

又 $BD=ED$，所以 $BD^2=EH\cdot AB$. …………………………………………………… 10分

23.【解析】(Ⅰ)对于曲线 $C_1$：$x+y=2$，将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入，故有 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$，……………… 2分

对于曲线 $C_2$：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$，消去参数得 $x^2+y^2=4$，所以曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho=2$. ………………… 5分

(Ⅱ)联立方程$\begin{cases}\rho=2\\\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2\end{cases}$，得 $2\cos\theta+2\sin\theta=2$，∴$\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∵$\theta\in[0,2\pi)$，∴$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，或 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$，∴$\theta=0$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

所以两交点的极坐标为$(2,0)$，$(2,\dfrac{\pi}{2})$，…………………………………………………………………… 9分

根据勾股定理，所以两交点间的距离为 $2\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 10分

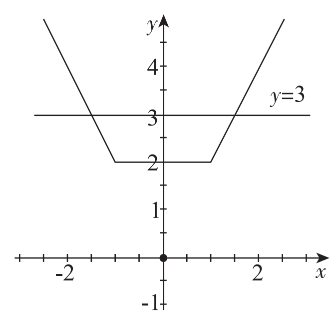
24.【解析】(Ⅰ)函数 $f(x)=|x+1|+|x-m|$表示数轴上的 $x$ 对应点到$-1$ 和 $m$ 对应点的距离之和，由于不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集为$(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$，

故有$\begin{cases}|-2+1|+|-2-m|=6\\|4+1|+|4-m|=6\end{cases}$，即$\begin{cases}|2+m|=5\\|4-m|=1\end{cases}$，得 $m=3$. …………………………………… 5分

(Ⅱ)因为$\left|\dfrac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}\right|=\left||1+\dfrac{1}{a}|-|2-\dfrac{1}{a}|\right|\leqslant|1+\dfrac{1}{a}+2-\dfrac{1}{a}|=3$，

当且仅当$(1+\dfrac{1}{a})(2-\dfrac{1}{a})\leqslant 0$ 时，取等号，…………………………………………………… 6分

所以 $M\geqslant 3$，$f(x)=|x+1|+|x-1|=\begin{cases}2x,x\geqslant 1\\2,-1<x<1\\-2x,x\leqslant -1\end{cases}$，图象如图所示，




显然，$y=M=3$ 时，直线与 $f(x)$图象围成的图形的面积最小.

两交点的坐标为$(-\dfrac{3}{2},3)$，$(\dfrac{3}{2},3)$，……………………………………………… 8分

所以围成的图形为一个等腰梯形，所以面积为$\dfrac{1}{2}\times(2+3)\times 1=\dfrac{5}{2}$.

故函数 $f(x)$的图象与直线 $y=M$ 围成的图形的面积的最小值为$\dfrac{5}{2}$. ………………………………… 10分