全国 100 所名校最新高考模拟示范卷·数学卷

参考答案(一～三)

(一)

1. D　因为 $B=\{x|(x-1)(x-3)<0\}=\{x|1<x<3\}$,所以 $A\cap B=\{x|2\leqslant x<3\}$.

2. A　$z=\dfrac{5-5i}{|3-4i|}=\dfrac{5-5i}{5}=1-i$.

3. A　依题意知 p 为真命题,当 $c=0$ 时,命题 q 为假命题,所以选项 A 为真命题,B,C,D 为假命题.

4. C　依题意过点(1,0),设双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,所以 $a=1,\dfrac{b}{a}=2$,所以 $b=2$,则双曲线的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$,故 C 正确.

5. B　依题意 $f(x)=\begin{cases}x+1,x>0\\0,x=0\\x-1,x<0\end{cases}$,画出函数图象知,$f(x)$ 为增函数且是奇函数,有一个零点. 结合选项知 B 正确.

6. A　由题意可得 $\overline{x}=m+1,\overline{y}=\dfrac{m+15.5}{4}$,因为 $\hat{y}=2.2x+0.7$ 经过点 $(\overline{x},\overline{y})$,所以 $\dfrac{m+15.5}{4}=2.2\times(m+1)+0.7$,解得 $m=0.5$.

7. C　$S=1$,满足条件 $S\leqslant2$,则 $P=2,S=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$;

满足条件 $S\leqslant2$,则 $P=3,S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$;

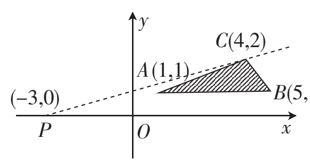
满足条件 $S\leqslant2$,则 $P=4,S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{12}$,

不满足条件 $S\leqslant2$,退出循环,此时 $P=4$.

8. B　依题意函数周期为 π,$\therefore\omega=2$,又 $f(\dfrac{\pi}{6})=0$,$\therefore\sin(2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=0$,$\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,\varphi=k\pi-\dfrac{\pi}{3}$,$0<\varphi<\pi$,$\therefore\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$,$\therefore f(x)=\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$,易知 $x_1+x_2=-\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore f(x_1+x_2)=\sin(\dfrac{1}{3}\pi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

9. A　画出不等式组表示的平面区域,由图可得最优解应在线段 AC 上取到,故 $x+ay=0$ 应与直线 AC 平行. $\because k_{AC}=\dfrac{2-1}{4-1}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}$,$\therefore a=-3$,则 $\dfrac{y}{x-a}=\dfrac{y-0}{x-(-3)}$ 表示点 $P(-3,0)$ 与可行域内的点 $Q(x,y)$ 连线的斜率. 由图得,当 Q 点与 C 点重合时,$\dfrac{y}{x-a}$ 取得最大值,最大值是 $\dfrac{2}{4-(-3)}=\dfrac{2}{7}$.



10. B　由三视图知:该几何体是由一个半圆柱和一个长方体组成,长方体的体积为 $V_1=2\times2\times2r=8r$,半圆柱的体积为 $V_2=\dfrac{1}{2}\pi r^2\times4=2\pi r^2$,所以 $8r+2\pi r^2=16+8\pi$,所以 $r=2$.

11. D　由题意 $S_{\triangle AOF}=3S_{\triangle BOF}$ 可得 $|AF|=3|BF|$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由抛物线的定义得 $x_1+1=3(x_2+1)$,$x_1=3x_2+2$①,联立直线方程和抛物线方程 $\begin{cases}y=m(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$,消去 y 得 $m^2x^2-(2m^2+4)x+m^2=0$,$\therefore x_1+x_2=$

$\frac{2m^2+4}{m^2}$②，$x_1x_2=1$③，由①③得 $x_1=3,x_2=\frac{1}{3}$，代入②得 $m^2=3$，易知 $m>0$，∴$m=\sqrt{3}$.

12. B　∵实数 a,b,c,d 满足$\frac{a-2e^a}{b}=\frac{2-c}{d}=1$，∴$b=a-2e^a$，$d=2-c$，

∴点(a,b)在曲线 $y=x-2e^x$ 上，点(c,d)在直线 $y=2-x$ 上，

∴$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的几何意义就是曲线 $y=x-2e^x$ 到直线 $y=2-x$ 上点的距离最小值的平方.

考查曲线 $y=x-2e^x$ 上和直线 $y=2-x$ 平行的切线，

∵$y'=1-2e^x$，∴令 $y'=1-2e^x=-1$，解得 $x=0$，∴切点为$(0,-2)$，

该切点到直线 $y=2-x$ 的距离 $d=\frac{|0-2-2|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$就是所要求的直线与曲线间的最小距离，

故$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 $d^2=8$，故选 B.

13. $\frac{10}{3}$　由 $a=\log_4 3$ 得 $4^a=3\Rightarrow 2^{2a}=3$，则 $2^{2a}+2^{-2a}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

14. $\frac{\pi}{3}$(或 $60°$)　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$，即 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{a}^2}=\frac{1}{2}$，所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

15. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　根据题意可得$\triangle ABC$为直角三角形，且$\angle ACB=90°$，所以 $BC=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$. 因为 AB 为球直径，所以 $OP=\sqrt{3}$，所以三棱锥的体积为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

16. $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2})$　由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-1)$. 令 $t=\frac{a}{c}$，∵三角形 ABC 为锐角三角形，且 $b^2=ac$，

∴$\begin{cases}a^2+ac>c^2 & ①\\ a^2+c^2>ac & ②\\ c^2+ac>a^2 & ③\end{cases}$，②恒成立，故由①，③得$\begin{cases}t^2+t-1>0\\ t^2-t-1<0\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}-1}{2}<t<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

设 $\cos B=f(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}-1)$在$(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$上递减，在$(1,\frac{\sqrt{5}+1}{2})$上递增，

∴$f(t)_{\min}=f(1)=\frac{1}{2}$，又 $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})=f(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴$\cos B\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

17. 解：(1)∵$a_{n+2}+2\sqrt{a_na_{n+2}}+a_n=4a_{n+1}$且 $a_n>0$，

∴$(\sqrt{a_{n+2}}+\sqrt{a_n})^2=(2\sqrt{a_{n+1}})^2$，

∴$\sqrt{a_{n+2}}+\sqrt{a_n}=2\sqrt{a_{n+1}}$，

∴$\{\sqrt{a_n}\}$是首项为 1，公差为$\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}=1$ 的等差数列. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)得$\sqrt{a_n}=1+(n-1)=n$，即 $a_n=n^2$，

∴$\frac{4n+2}{a_na_{n+1}}=2\times\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=2[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]$，

∴$S_n=2[1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]=2-\frac{2}{(n+1)^2}<2$. ……………………………… 12 分

18. 证明：(1)取 PB 中点 M，连接 RM，SM.

∵R、S 分别是棱 AB、PC 的中点，$AD/\!/BC$，

$\therefore SM /\!/ CB /\!/ AD, RM /\!/ AP$.

又 $AP \subset$ 平面 PAD，$\therefore RM /\!/$ 平面 APD，同理 $SM /\!/$ 平面 APD.

又 $RM \subset$ 平面 SMR，$SM \subset$ 平面 SMR，且 $RM \cap SM = M$，

$\therefore$ 平面 $PAD /\!/$ 平面 SMR.

$\because RS \subset$ 平面 SMR，$\therefore RS /\!/$ 平面 PAD. …………………………………………………… 6 分

(2)根据题意可得 $BQ = 3AQ$，$\therefore AQ = \frac{1}{2}AR$.

$\because AP \perp PB$，$AB = 2AP$，$\therefore \angle BAP = 60°$，

则 $\triangle APR$ 为等边三角形.

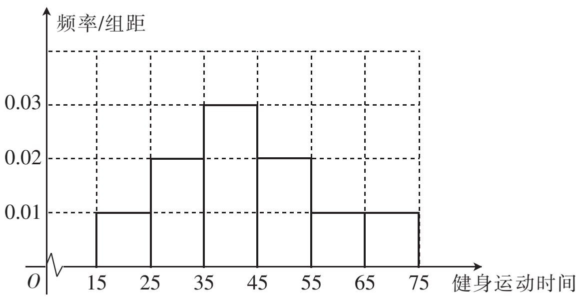
又 Q 为 AR 中点，$\therefore PQ \perp AQ$. ………………………………………………………………… 9 分

又 $\because AD \perp$ 平面 APB，$PQ \subset$ 平面 APB，

$\therefore PQ \perp AD$，$\therefore PQ \perp$ 平面 ADQ.

$\because PQ \subset$ 平面 DPQ，$\therefore$ 平面 $DPQ \perp$ 平面 ADQ. …………………………………………… 12 分

19. 解：(1)如图：



…………………………………………………… 2 分

(2)$20 \times 0.1 + 30 \times 0.2 + 40 \times 0.3 + 50 \times 0.2 + 60 \times 0.1 + 70 \times 0.1 = 43$(分钟)，

即该社区居民每天健身运动的平均时间为 43 分钟. ………………………………………………… 5 分

(3)由上表可知：健身运动时间在[25,35)组的有两名男居民，分别记作甲和乙；健身运动时间在[45,55)组的有四名男居民，分别记作 A,B,C,D. 现在从这 6 人中随机选取 2 人的基本事件有如下 15 组：

(甲,乙)，(甲,A)，(甲,B)，(甲,C)，(甲,D)，(乙,A)，(乙,B)，(乙,C)，(乙,D)，(A,B)，(A,C)，(A,D)，(B,C)，(B,D)，(C,D).

其中健身运动时间超过 10 分钟，

即为不同组有(甲,A)，(甲,B)，(甲,C)，(甲,D)，(乙,A)，(乙,B)，(乙,C)，(乙,D)，共 8 组，所以所求概率为 $P = \frac{8}{15}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意知 $c = \sqrt{2}$，$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a = \sqrt{3}$，$b = 1$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)设 $A(x_1, y_1)(x_1 y_1 \neq 0)$，$D(x_2, y_2)$，则 $B(-x_1, -y_1)$.

因为直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_1}{x_1}$，

又 $AB \perp AD$，所以直线 AD 的斜率 $k = -\frac{x_1}{y_1}$.

设直线 AD 的方程为 $y = kx + m$，由题意知 $k \neq 0$，$m \neq 0$.

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$可得$(1+3k^2)x^2+6mkx+3m^2-3=0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{6mk}{1+3k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{2m}{1+3k^2}$.

由题意知$x_1\neq x_2$，所以$k_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{1}{3k}=\dfrac{y_1}{3x_1}$，所以直线$BD$的方程为$y+y_1=\dfrac{y_1}{3x_1}(x+x_1)$，令$y=0$，得$x=2x_1$，即$M(2x_1,0)$，可得$k_2=-\dfrac{y_1}{x_1}$，

所以$k_1=-\dfrac{1}{3}k_2$，即$\lambda=-\dfrac{1}{3}$，因此，存在常数$\lambda=-\dfrac{1}{3}$使得结论成立. …………………… 12分

21. 解：(1)由题意可得$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x+a}{x}$.

当$a\geqslant 0$时，$f'(x)\geqslant 0$，函数在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a<0$时，$f'(x)>0$可得$x>-a$；$f'(x)<0$可得$0<x<-a$，

$\therefore f(x)$在$(-a,+\infty)$上单调递增，在$(0,-a)$上单调递减. …………………… 4分

(2)$g'(x)=\dfrac{1}{x}+x-(b-1)=\dfrac{x^2-(b-1)x+1}{x}$，令$g'(x)=0$，则$x_1+x_2=b-1$，$x_1x_2=1$.

$\because g(x_1)-g(x_2)=[\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_1^2-(b-1)x_1]-[\ln x_2+\dfrac{1}{2}x_2^2-(b-1)x_2]$

$=\ln\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(b-1)(x_1-x_2)$

$=\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1})$，

又$0<x_1<x_2$，设$t=\dfrac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，$h(t)=\ln t-\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{1}{t})(0<t<1)$，

则$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{t^2})=-\dfrac{(t-1)^2}{2t^2}<0$，

$\therefore h(t)$在$(0,1)$上单调递减，又$b\geqslant\dfrac{7}{2}$，$\therefore(b-1)^2\geqslant\dfrac{25}{4}$，

即$(x_1+x_2)^2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1\cdot x_2}=t+\dfrac{1}{t}+2\geqslant\dfrac{25}{4}$.

$\because 0<t<1$，$\therefore 4t^2-17t+4\geqslant 0$，$\therefore 0<t\leqslant\dfrac{1}{4}$，$h(t)\geqslant h(\dfrac{1}{4})=\dfrac{15}{8}-2\ln 2$，

故所求的最小值是$\dfrac{15}{8}-2\ln 2$. …………………… 12分

22. 解：(1)因为BE是$\odot O$的切线，所以$\angle EBD=\angle BAD$.

又因为$\angle CBD=\angle CAD$，$\angle BAD=\angle CAD$，

所以$\angle EBD=\angle CBD$，即BD平分$\angle EBC$. …………………… 4分

(2)由(1)可知$\angle EBD=\angle BAD$，且$\angle BED=\angle BED$，

所以$\triangle BDE\backsim\triangle ABE$，

所以$\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BD}{AB}$.

又因为$\angle BAD=\angle CAD$，所以$BD=CD$，

所以$\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{CD}{AB}$，

所以 $AE \cdot DC=AB \cdot BE$. …………………………………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)由 $x=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha$，得 $x^2=2\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+1$，

所以曲线 M 可化为 $y=x^2-1, x\in[-2,2]$. 由 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}t$，

得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}t$，所以 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=t$，所以直线 N 可化为 $x+y=t$. ………………………… 5 分

(2)若直线 N 与曲线 M 有公共点，则当直线 N 过点(2,3)时，满足要求，

此时 $t=5$，并且向左下方平行运动直到相切之前总有公共点，相切时仍只有一个公共点.

联立 $\begin{cases}x+y=t\\y=x^2-1\end{cases}$ 得 $x^2+x-1-t=0$，

可知 $\Delta=1+4(1+t)=0$，解得 $t=-\frac{5}{4}$.

综上可得 t 的取值范围是 $-\frac{5}{4}\leqslant t\leqslant 5$. ……………………………………………………………………………… 10 分

24. 解：(1)当 $a=-3$ 时，$f(x)\geqslant 3$，即 $|x-3|+|x-2|\geqslant 3$，即

$\begin{cases}x\leqslant 2\\3-x+2-x\geqslant 3\end{cases}$，可得 $x\leqslant 1$；

$\begin{cases}2<x<3\\3-x+x-2\geqslant 3\end{cases}$，可得 $x\in\varnothing$；

$\begin{cases}x\geqslant 3\\x-3+x-2\geqslant 3\end{cases}$，可得 $x\geqslant 4$，

取并集可得不等式的解集为 $\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4\}$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)原命题即 $f(x)\leqslant|x-4|$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，等价于 $|x+a|+2-x\leqslant 4-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，等价于 $|x+a|\leqslant 2$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，等价于 $-2\leqslant x+a\leqslant 2$，$-2-x\leqslant a\leqslant 2-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立.

故当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-2-x$ 的最大值为 $-2-1=-3$，$2-x$ 的最小值为 0，

故 a 的取值范围为 $[-3,0]$. ………………………………………………………………………………………… 10 分

(二)

1. C　∵$B=\{2,3\}$,∴$A\cup B=\{1,2,3\}$,$\complement_U(A\cup B)=\{0,4\}$.

2. C　∵$z=\dfrac{3+2i}{i}=2-3i$,∴$|\bar{z}-1|=|1+3i|=\sqrt{10}$.

3. C　根据奇函数的定义和命题的特点,C 正确.

4. D　∵$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,∴$y-2\times2=0$,∴$y=4$,∴$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,2)+2(2,4)=(5,10)$.

5. B　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,∵$a_1=2$,$a_2+a_5=0$,∴$2q(1+q^3)=0$,且 $q\neq0$,解得 $q=-1$,∴$S_{2015}=2$,$S_{2016}=0$,∴$S_{2015}+S_{2016}=2$.

6. D　该几何体为一个球体,下半球完整,上半球分为四份,去掉了对顶的两份,故表面积应为球的表面积,去掉$\dfrac{1}{4}$球的表面积,再加上 6 个$\dfrac{1}{4}$圆面积,故 $S=4\pi R^2-\dfrac{1}{4}\cdot4\pi R^2+6\cdot\dfrac{1}{4}\pi R^2=\dfrac{9}{2}\pi R^2$,又球半径 $R=1$,$S=\dfrac{9\pi}{2}$.

7. C　∵双曲线渐近线为 $bx\pm ay=0$,与圆$(x-2)^2+y^2=1$ 相离,∴圆心到渐近线的距离大于半径,即$\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}>1$,∴$3b^2>a^2$,∴$c^2=a^2+b^2>\dfrac{4}{3}a^2$,∴$e=\dfrac{c}{a}>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

8. A　第一次循环:$(1,0)\to n=3\to x=2\to y=-2$;
第二次循环:$(2,-2)\to n=5\to x=4\to y=-4$;
第三次循环:$(4,-4)\to n=7\to x=8\to y=-6$;
第四次循环:$(8,-6)\to n=9\to x=16\to y=-8$;
第五次循环:$(16,-8)\to n=11\to x=32\to y=-10$,
所以 $x=32$.

9. D　$V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{a}{2})^3=\dfrac{\pi}{6}a^3\Rightarrow k_1=\dfrac{\pi}{6}$;

$V_2=\pi R^2a=\pi(\dfrac{a}{2})^2a=\dfrac{\pi}{4}a^3\Rightarrow k_2=\dfrac{\pi}{4}$;$V_3=a^3\Rightarrow k_3=1$.

故 $k_1:k_2:k_3=\dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{4}:1$.

10. D　$f(x)=a\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{a^2+3}\sin(x-\varphi)(\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{a})$.因为 $f(x)=a\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一条对称轴为 $x=-\dfrac{\pi}{6}$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $a=1$,所以$f(x)=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$.因为 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-4$,所以 $x_1=-\dfrac{\pi}{6}+2k_1\pi$,$x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2k_2\pi(k_1\in\mathbf{Z},k_2\in\mathbf{Z})$,所以$|x_1+x_2|=|\dfrac{2\pi}{3}+2(k_1+k_2)\pi|$,所以$|x_1+x_2|$的最小值为$\dfrac{2}{3}\pi$.

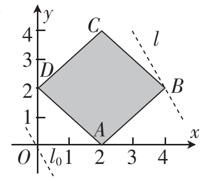
11. C　设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,直线 AB:$y=x+b$,代入 $y^2=2px$ 中消去 x 得,$y^2-2py+2pb=0$,∴$y_1+y_2=2p$,$x_1+x_2=y_1+y_2-2b=2p-2b$,由条件知线段 AB 的中点$(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$,即$(p-b,p)$在直线 $x+y-1=0$ 上,∴$b=2p-1$,$\Delta=4p^2-8pb=4p^2-8p(2p-1)=-12p^2+8p>0$,∴$0<p<\dfrac{2}{3}$.

12. C　问题可以转化为 $ae^x=x$ 有两个根,即 $y=ae^x$,$y=x$ 有两个交点,当 $a\leqslant0$ 时,画出函数图像可知不合题意;当 $a>0$ 时,$y=x$ 与 $y=ae^x$ 相切时是临界情况,此时 $a=\dfrac{1}{e}$,结合图像可知 $y=ae^x$,$y=x$ 有两个交点时,$0<a<\dfrac{1}{e}$.

13. $\sqrt{3}$　$\dfrac{\tan27^\circ+\tan213^\circ}{1-\tan27^\circ\tan33^\circ}=\dfrac{\tan27^\circ+\tan33^\circ}{1-\tan27^\circ\tan33^\circ}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$.

14. $\frac{1}{4}$　因甲、乙、丙三名学生在两个食堂中选一个用餐，共有 8 种，又甲、乙、丙三名学生在同一个食堂用餐有 2 种，∴所求概率为 $P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

15. 10　作出可行域如图中阴影部分所示，作出直线 $l_0:2x+y=0$，平移 l_0，由图可知，直线 $l:z=2x+y$ 过 $B(4,2)$ 时，z 取最大值 10 .



16. 992　∵a_n 与 a_{n+1} 是方程 $x^2+3nx+b_n=0$ 的两根，∴$a_n+a_{n+1}=-3n$，$a_n\cdot a_{n+1}=b_n$.
由 $a_n+a_{n+1}=-3n$，$a_{n+1}+a_{n+2}=-3(n+1)$，∴$a_{n+2}-a_n=-3$，
可得 n 为奇数、偶数时分别成等差数列，由 $a_{10}=-13$，∴$a_{22}=-13+6\times(-3)=-31$，
∴$a_{21}=-3\times21-(-31)=-32$，∴$b_{21}=a_{21}\cdot a_{22}=-31\times(-32)=992$.

17. 解：(1)由 $\cos B\sin C+(a-\sin B)\cos(A+B)=0$，
可得 $\cos B\sin C-(a-\sin B)\cos C=0$，
即 $\sin A=a\cos C$，又 $c=1$，所以 $c\sin A=a\cos C$，
由正弦定理得 $\sin C\sin A=\sin A\cos C$，
因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，从而 $\sin C=\cos C$，即 $C=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理 $a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$，得 $a^2+b^2-\sqrt{2}ab=1$，
又 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，所以 $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(a^2+b^2)\leqslant1$，于是 $a^2+b^2\leqslant2+\sqrt{2}$，
当 $A=B=\frac{3}{8}\pi$ 时，a^2+b^2 取到最大值 $2+\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 12 分

18. (1)解：∵$\triangle ABC$ 为等边三角形，且 $AC=2$，∴$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$.
∵$EB\perp$平面 ABC，$BE=\sqrt{3}$，∴三棱锥 $A-BCE$ 的体积 $V_{A-BCE}=V_{E-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot BE=1$. ………… 6 分
(2)证明：取 AC 的中点 O，连接 DO、BO，∵$\triangle ACD$ 为等边三角形，且 $AC=2$，
∴$DO\perp AC$，$DO=\sqrt{3}$，∵平面 $ACD\perp$平面 ABC，平面 $ACD\cap$平面 $ABC=AC$，
∴$DO\perp$平面 ABC，∵$EB\perp$平面 ABC，$BE=\sqrt{3}$，∴$BE/\!/DO$，$DO=BE$，
∴四边形 $BODE$ 为平行四边形，∴$DE/\!/BO$，
又∵$DE\not\subset$平面 ABC，$BO\subset$平面 ABC，∴$DE/\!/$平面 ABC. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)$S(\omega)=\begin{cases}0(\omega\in[0,100]),\\4\omega-100(\omega\in(100,300]),\\2000(\omega\in(300,+\infty)).\end{cases}$ ………………………………………………… 4 分
(2)设"在本年内随机抽取一天，该天经济损失 S 大于 500 元且不超过 900 元"为事件 A，由 $500<S\leqslant900$，得 $150<\omega\leqslant250$，频数为 39，
$P(A)=\frac{39}{100}$. ……………………………………………………………………………………………… 7 分
(3)根据题中数据得到如下列联表：

	非重度污染	重度污染	合计
供暖季	22	8	30
非供暖季	63	7	70
合计	85	15	100

K^2 的观测值 $k=\frac{100\times(63\times8-22\times7)^2}{85\times15\times30\times70}\approx4.575>3.841$. 所以能在犯错的概率不超过 0.05 的前提下认为空气重度污染与供暖有关. …………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)因为椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 过 $M(2,\sqrt{2})$, $N(\sqrt{6},1)$ 两点,

所以 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1,\\ \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{1}{8},\\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{4},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=4,\end{cases}$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)假设存在圆心在原点的圆,使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,设该圆的切线方程为 $y=kx+m$,解方程组 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 得 $x^2+2(kx+m)^2=8$,即 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$,

则 $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)=8(8k^2-m^2+4)>0$,即 $8k^2-m^2+4>0$.

$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2},\\ x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2},\end{cases}$

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{k^2(2m^2-8)}{1+2k^2}-\frac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$,

要使 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,需使 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $\frac{2m^2-8}{1+2k^2}+\frac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=0$,

所以 $3m^2-8k^2-8=0$,所以 $k^2=\frac{3m^2-8}{8}\geqslant0$,又 $8k^2-m^2+4>0$,所以 $\begin{cases}m^2>2,\\ 3m^2\geqslant8,\end{cases}$ 所以 $m^2\geqslant\frac{8}{3}$,即 $m\geqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $m\leqslant-\frac{2\sqrt{6}}{3}$,因为直线 $y=kx+m$ 为圆心在原点的圆的一条切线,所以圆的半径为 $r=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, $r^2=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{m^2}{1+\frac{3m^2-8}{8}}=\frac{8}{3}$, $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,故存在圆的方程为 $x^2+y^2=\frac{8}{3}$. …………………………………………………… 12 分

21. 解:(1) $f'(x)=\frac{ax-2}{x^2}$.

当 $a=0$ 时, $f'(x)=-\frac{2}{x^2}<0$,单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得单调增区间为 $(\frac{2}{a},+\infty)$;

令 $f'(x)<0$,得单调减区间为 $(0,\frac{2}{a})$.

当 $a<0$ 时, $f'(x)=\frac{ax-2}{x^2}<0$,得单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

所以当 $a\leqslant0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},+\infty)$ 上单调递增, $(0,\frac{2}{a})$ 上单调递减. ………………………………… 5 分

(2)当 $a=1$ 时, $g(x)=\frac{2}{x}+\ln x-2+x-b$,

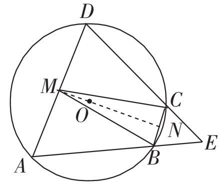
$g'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+1=\frac{x^2+x-2}{x^2}=\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}$.

令 $g'(x)=0$,得 $x_1=-2,x_2=1$,在区间$[e^{-1},e]$上,令 $g'(x)>0$,得递增区间为$(1,e)$,

令 $g'(x)<0$,得递减区间为$(\frac{1}{e},1)$,所以 $x=1$ 是 $g(x)$在$[e^{-1},e]$上唯一的极小值点,也是最小值点,所以 $g(x)_{min}=g(1)=1-b$,又因为 $g(x)$在$[e^{-1},e]$上有两个零点,

所以只需$\begin{cases}g(1)<0\\g(\frac{1}{e})\geqslant 0\\g(e)\geqslant 0\end{cases}$,$\Rightarrow\begin{cases}b>1\\b\leqslant 2e+\frac{1}{e}-3\\b\leqslant e+\frac{2}{e}-1\end{cases}$,所以 $1<b\leqslant e+\frac{2}{e}-1$. ······························· 12分

22. 证明:(1)∵四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形,



∴$\angle D=\angle CBE$,

∵$CB=CE$,∴$\angle E=\angle CBE$,∴$\angle D=\angle E$. ······························· 5分

(2)设 BC 的中点为 N,连接 MN,

则由 $MB=MC$ 知 $MN\perp BC$,∴O 在直线 MN 上,

∵AD 不是$\odot O$的直径,AD 的中点为 M,∴$OM\perp AD$,

∴$AD/\!/BC$,∴$\angle A=\angle CBE$,

∵$\angle CBE=\angle E$,∴$\angle A=\angle E$,由(1)知,$\angle D=\angle E$,

∴$\triangle ADE$ 为等边三角形. ······························· 10分

23. 解:(1)对于 C:由 $\rho=4\cos\theta$,得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$,进而 $x^2+y^2=4x$.

对于 l:由$\begin{cases}x=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\y=\frac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),得 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-5)$,即 $x-\sqrt{3}y-5=0$. ······························· 5分

(2)由(1)可知 C 为圆,且圆心为$(2,0)$,半径为 2,则弦心距 $d=\frac{|2-\sqrt{3}\times 0-5|}{\sqrt{1+3}}=\frac{3}{2}$,

弦长$|PQ|=2\sqrt{2^2-(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{7}$,因此以 PQ 为边的圆 C 的内接矩形面积 $S=2d\cdot|PQ|=3\sqrt{7}$. ········ 10分

24. 解:(1)解不等式:$|x+1|+|x-1|<4$,

$\begin{cases}x\geqslant 1,\\2x<4\end{cases}$或$\begin{cases}-1\leqslant x<1,\\2<4\end{cases}$或$\begin{cases}x<-1,\\-2x<4\end{cases}$$\Rightarrow 1\leqslant x<2$ 或 $-1\leqslant x<1$ 或 $-2<x<-1\Rightarrow -2<x<2\Rightarrow M=\{x|-2<x<2\}$. ······························· 5分

(2)要证明 $2|a+b|<|4+ab|$,只需证明 $4(a^2+2ab+b^2)<a^2b^2+8ab+16$,

只需证明 $a^2b^2-4a^2-4b^2+16>0$,

即需证明$(a^2-4)(b^2-4)>0$.

因为 $a,b\in(-2,2)\Rightarrow a^2<4,b^2<4\Rightarrow a^2-4<0,b^2-4<0\Rightarrow(a^2-4)(b^2-4)>0$,所以原不等式成立. ······ 10分

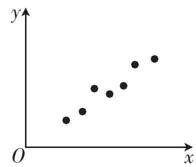
（三）

1. D　因为 $B=\{x|1\leqslant 2^x\leqslant 4\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

2. C　$\frac{i}{1+i}+\frac{i}{1-i}=(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i})i=\frac{(1+i+1-i)i}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i$.

3. A　依题意，$\because \boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(1,-2)+2\times(-3,4)=(-5,6)$，$\because \boldsymbol{c}=(3,2)$，$\therefore (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c}=(-5,6)\cdot(3,2)=-5\times 3+6\times 2=-3$.

4. A　画出散点图如图，可知酒驾人数 x 与交通事故数 y 之间是正相关.



5. A　对于B、D选项，取 $x=y=-3$，对于C选项，取 $x=y=2$，可知选项B、C、D的条件都不满足要求. 只有A选项正确.

6. B　由题知 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，所以 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{1}{3}+1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1}{2}$.

7. B　由题知，该几何体为底面半径为3，高为6的圆柱斜截除去一半和底面半径为3，高为2的圆柱的组合体，所以该几何体的体积为 $\frac{1}{2}\pi\times 3^2\times 6+\pi\times 3^2\times 2=45\pi$.

8. C　线段 AB 的垂直平分线过点 $(3,5)$，且斜率为 -1，所以其方程为 $y-5=-(x-3)$，易知线段 BC 的垂直平分线所在的方程为 $y=2$，解得两垂直平分线的交点（即 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心）坐标为 $(6,2)$，同样易得直线 AC 的方程 $3x-y-6=0$，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心到边 AC 的距离为 $\frac{|3\times 6-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$.

9. D　第一次执行循环体得 $S=1,i=2$；第二次执行循环体得 $S=\frac{3}{2},i=3$；第三次执行循环体得 $S=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6},i=4$；第四次执行循环体得 $S=\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12},i=5$；第五次执行循环体得 $S=\frac{25}{12}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}>\frac{9}{4}$，此时不满足判断框跳出循环，所以输出的值为 $\frac{137}{60}$.

10. B　正四面体补全为正方体，它们的外接球是同一个球，正方体的对角线长就是球的直径，因为正四面体的表面积为 $8\sqrt{3}$，可得其棱长为 $2\sqrt{2}$，正方体的棱长为2，对角线长为 $2\sqrt{3}$，所以外接球的半径为 $\sqrt{3}$，所以球的表面积为 $4\pi\times(\sqrt{3})^2=12\pi$.

11. D　根据题意得出：$\angle POA=\frac{x}{\frac{1}{2}}=2x$，所以 $0<2x<\pi$，即 $0<x<\frac{\pi}{2}$. 易知 $\frac{AP}{\sin x}=\frac{BP}{\sin[\frac{1}{2}(\pi-2x)]}=\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$，所以 $AP=\sin x$，$BP=\cos x$. 所以 $y=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x+1}=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2(\sin x+\cos x+1)}=\frac{\sin x+\cos x-1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$. 于是可知选项为D.

12. B　设 $h(x)=f(x)-\log_2 x$，所以任取 x_1、x_2、…、$x_n\in(0,+\infty)$，
都有 $f(h(x_1))=f(h(x_2))=\cdots=f(h(x_n))=6$，又由于函数 $f(x)$ 是单调函数，
所以 $h(x_1)=h(x_2)=\cdots=h(x_n)$，即 $h(x)$ 是常数函数，可设 $f(m)=6$（m 为大于0的常数）.

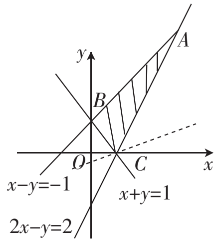
则由 $f(f(x)-\log_2 x)=6$ 可得 $f(x)-\log_2 x=m$,即 $f(x)=m+\log_2 x$,

则 $f(m)=m+\log_2 m=6$,易得 $m=4$,所以 $f(x)=4+\log_2 x$,

那么 $f(a^2+a)=4+\log_2(a^2+a)>5$,即 $a^2+a>2$,解得 $a<-2$ 或 $a>1$.

13. $-\frac{3}{5}$　易知$\begin{cases}f(0)=\frac{a}{2}+b=0,\\ f(-1)=\frac{2a}{3}+b=\frac{1}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=-1,\end{cases}$所以 $f(2)=\frac{2}{2^2+1}-1=-\frac{3}{5}$.

14. -5　作出可行域如图所示:



易求得 $A(3,4)$,$B(0,1)$,$C(1,0)$,平移初始直线 $x-2y=0$,可知过 $A(3,4)$时,z 取得最小值,最小值为 $3-2\times4=-5$.

15. $\sqrt{13}$　$\because |AB|:|BF_2|:|AF_2|=3:4:5$,不妨令$|AB|=3$,$|BF_2|=4$,$|AF_2|=5$.

$\because |AB|^2+|BF_2|^2=|AF_2|^2$,$\therefore \angle ABF_2=90^\circ$

又由双曲线的定义得$|BF_1|-|BF_2|=2a$,$|AF_2|-|AF_1|=2a$,

$\therefore |AF_1|+3-4=5-|AF_1|$,$\therefore |AF_1|=3$.

$\therefore |BF_1|-|BF_2|=3+3-4=2a$,

$\therefore a=1$.

在 Rt$\triangle BF_1F_2$ 中,$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2=6^2+4^2=52$,

$\because |F_1F_2|^2=4c^2$,$\therefore 4c^2=52$,$\therefore c=\sqrt{13}$.

$\therefore$双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{13}$.

16. 4　由正弦定理得 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$,

则 $2R\sin C+2R\sin B\sin A\times\frac{\sin B}{\cos B}=8R\sin A+2R\sin B\cos A$,

即 $\cos B\sin C+\sin B\sin A\sin B=4\cos B\sin A+\cos B\sin B\cos A$,

故 $\cos B\sin C-4\cos B\sin A=\sin B(\cos B\cos A-\sin A\sin B)$,

可得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=4\sin A\cos B$,

即 $\sin(B+C)=4\sin A\cos B$,可得 $\sin A=4\sin A\cos B$,

又 $\sin A\neq0$,因此 $\cos B=\frac{1}{4}$.

由 $\cos B=\frac{1}{4}$,得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$;

由$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\times ac=\sqrt{15}$,得 $ac=8$;

由 $\sin A=2\sin C$,得 $a=2c$. 解得 $a=4$,$c=2$.

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=16+4-2\times4\times2\times\frac{1}{4}=16$,则 $b=4$.

17. 解:(1)因为 $b_n=a_n-3n$,所以 $a_n=b_n+3n$. …………………………………………………… 2分

又 $a_n=2a_{n-1}-3n+6$,所以 $b_n+3n=2[b_{n-1}+3(n-1)]-3n+6$,

即 $b_n=2b_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$, …………………………………………………… 4分

所以数列$\{b_n\}$是以 $b_1=a_1-3=-2$ 为首项,2 为公比的等比数列. …………………… 6分

(2)由(1)得 $b_n=(-2)\cdot 2^{n-1}$,…………………………………………………………… 8分

所以 $a_n=b_n+3n=(-2)\cdot 2^{n-1}+3n$. ………………………………………………… 10分

故数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{-2(1-2^n)}{1-2}+\dfrac{n(3+3n)}{2}=-2^{n+1}+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n+2$.

…………………………………………………………………………………………………… 12分

18. 解析:(1)根据频率分布直方图可得用微信的男性和女性统计表:

每天使用微信的时间(小时)	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10]
男	20	24	36	14	6
女	18	20	32	22	8

…………………………………………………………………………………………………… 3分

所以可得 2×2 列联表如下:

	非微信控	微信控	合计
男	80	20	100
女	70	30	100
合计	150	50	200

…………………………………………………………………………………………………… 6分

(2)由(1)中 2×2 列联表可得 $a=80,b=20,c=70,d=30,n=a+b+c+d=200$,……………… 8分

根据公式可得 K^2 的观测值 $k=\dfrac{200(30\times 80-20\times 70)^2}{150\times 50\times 100\times 100}\approx 2.667<3.841$. ……………… 10分

所以不能在犯错误的概率不超过5%的情况下,认为“微信控”与“性别”有关. ……………… 12分

19. 解:(1)因为 $DD_1\perp$底面 $ABCD$,所以 $DD_1\perp AB$. 由四边形 $ABCD$ 为矩形知

$DA\perp AB$,由 $DD_1\cap DA=D$,所以 $AB\perp$平面 D_1DA. 因为 $DF\subset$平面 D_1DA.

所以 $AB\perp DF$,又 $AD=DD_1$,点 F 为 AD_1 的中点,所以 $AD_1\perp DF$,

又 $AD_1\cap AB=A$,所以 $DF\perp$平面 D_1BA. 又 $D_1E\subset$平面 D_1BA,故 $D_1E\perp FD$. ……………… 6分

(2)假设 DF∥平面 D_1CE,取 D_1E 的中点 G,连接 FG、CG,

所以 FG∥AE,$FG=\dfrac{1}{2}AE<AE<CD$,即 $FG<CD$.

因为 AB∥CD,所以 FG∥CD.

所以 F、G、C、D 四点共面. 因为平面 $FGCD\cap$平面 $D_1CE=CG$,

所以 DF∥CG,所以四边形 $FGCD$ 是平行四边形.

所以 $FG=CD$,这与 $FG<CD$ 矛盾,

所以在棱 AB(不包括 A、B 端点)上不存在一点 E,使得 DF∥平面 D_1CE. ……………… 12分

20. 解：(1)由题意得：$\begin{cases} a^2=b^2+c^2, \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1, \end{cases}$ ………………………………………… 2分

解得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$. ………………………………………… 4分

所以，椭圆 E 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 6分

(2)设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，联立方程$\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$①，

所以，判别式 $\Delta=(8k)^2+32(3+4k^2)=32(6k^2+3)>0$，

因为 x_1、x_2 为①式的根，所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{8}{3+4k^2}$， ………………………………………… 8分

由已知得 $M(-\dfrac{1}{k},0)$，$N(0,1)$，又$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{ND}$，所以$(-\dfrac{1}{k}-x_1,-y_1)=(x_2,y_2-1)$，

所以$-\dfrac{1}{k}-x_1=x_2$，即$-\dfrac{1}{k}=x_1+x_2=-\dfrac{8k}{3+4k^2}$，解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或 $k=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$(舍去). ………………………………………… 10分

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_1x_2=-\dfrac{4}{3}$，$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{20}{3}$，

所以 $|CD|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2[1+(\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2})^2]}=\sqrt{(x_1-x_2)^2(1+k^2)}=\sqrt{\dfrac{20}{3}\times(1+\dfrac{3}{4})}=$

$\dfrac{\sqrt{105}}{3}$. ………………………………………… 12分

21. 解：(1)函数 $f(x)=\ln x-2x+2$ 的定义域为$(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$，

由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{2}$， ………………………………………… 2分

所以当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$单调递增；

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$单调递减， ………………………………………… 4分

所以函数 $f(x)$的最大值为 $f(\dfrac{1}{2})=\ln\dfrac{1}{2}-1+2=1-\ln 2$. ………………………………………… 6分

(2)设 $g(x)=f(x)-(-ax^2+ax)=ax^2-(a+2)x+\ln x+2$，定义域为$(0,+\infty)$，

要使不等式 $f(x)\geqslant -ax^2+ax$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$上恒成立，只需 $g(x)_{\min}\geqslant 0$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$上恒成立，即需求函数 $g(x)$的最小值.

因为 $g'(x)=2ax-(a+2)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}$，

由于 $a>0$，所以由 $g'(x)=0$，即 $g'(x)=\dfrac{(2x-1)(ax-1)}{x}=0$，可得 $x=\dfrac{1}{2}$或 $x=\dfrac{1}{a}$， ………………………………………… 8分

①当 $0<\dfrac{1}{a}\leqslant 1$，即 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)$在 $x\in[1,\mathrm{e}]$上单调递增，所以 $g(x)$在 $x\in[1,\mathrm{e}]$上的最小值为 $g(1)=0$，满足题意；

②当 $1<\dfrac{1}{a}<\mathrm{e}$，即$\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$ 时，$g(x)$在$[1,\dfrac{1}{a}]$上单调递减，在$[\dfrac{1}{a},\mathrm{e}]$单调递增，所以$g(x)$在 $x\in[1,\mathrm{e}]$上的最小值为 $g(\dfrac{1}{a})<g(1)=0$，不合题意； ………………………………………… 10分

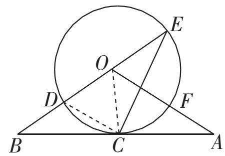
③当$\frac{1}{a}\geqslant e$,即$0<a\leqslant\frac{1}{e}$时,$g(x)$在$x\in[1,e]$上单调递减,所以$g(x)$在$x\in[1,e]$上的最小值为$g(e)$,而$g(e)<g(1)=0$,不合题意;

综上所述,a的取值范围为$[1,+\infty)$. ………………………………………………………… 12分

22.(1)证明:如图,连接OC, ∵$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CF}$,∴$\angle COF=\angle COD$.

∵$OA=OB$,∴$OC\perp AB$.

∴直线AB是⊙O的切线. ………………………………………………… 5分



(2)解:连接CD,∵直线AB是⊙O的切线,$\angle CED=30°$,

∴$\angle BCD=\angle E=30°$, ∵DE是圆O的直径,

∴$\angle DCE=90°$,∴$\angle B=180°-\angle E-\angle BCE=30°=\angle E$.

∴$CE=BC=1$,∴在$Rt\triangle CDE$中,$DE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

∴圆O的半径为$\frac{1}{2}DE=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 10分

23.解:(1)因为曲线C的参数方程为:$\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$为参数),则$x^2+y^2=4$,

设曲线G上任意一点为$N(x',y')$,则$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$即$\begin{cases}x=x',\\ y=2y',\end{cases}$

代入$x^2+y^2=4$得$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1$,即曲线G的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

直线l的极坐标方程为$\rho(\cos\theta-2\sin\theta)=4$,则直线$l$的直角坐标方程$x-2y-4=0$. ………… 5分

(2)设$P(2\cos\theta,\sin\theta)$,根据点到直线的距离公式,则点$P$到直线$l$的距离$d=\frac{|2\cos\theta-2\sin\theta-4|}{\sqrt{5}}=$

$\frac{|2\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})-4|}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{10}}{5}$.

所以点P到直线l的最大距离为$\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{10}}{5}$. ………………………………………………… 10分

24.解:(1)由$f(x)\leqslant|x-2|$,得$|2x-1|+1\leqslant|x-2|$.

当$x\leqslant\frac{1}{2}$时,$1-2x+1\leqslant2-x$,解得$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$;

当$\frac{1}{2}<x<2$时,$2x-1+1\leqslant2-x$,解得$\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{2}{3}$;

当$x\geqslant2$时,$2x-1+1\leqslant x-2$,无解.

综上所述,不等式$f(x)\leqslant|x-2|$的解集为$\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\}$. ………………………………………… 5分

(2)由$f(n)\leqslant m-f(-n)$得$f(n)+f(-n)\leqslant m$,

令$h(n)=f(n)+f(-n)$,则$m\geqslant h(n)_{\min}$.

因为$h(n)=|2n-1|+|2n+1|+2\geqslant|2n-1-2n-1|+2=4$,

所以$m\geqslant4$,故实数m的取值范围$[4,+\infty)$. ………………………………………………… 10分